Übungen zur Einführung in die Analysis

Blatt 1

Beispiel 1. Zeigen Sie $3+2=5$ bzw. $+(0''', 0'') = 0'''''$ unter Verwendung der Definition der Addition natürlicher Zahlen.

Beispiel 2. Zeigen Sie $x \cdot 2 = x+x$, für alle $x \in \mathbb{Z}$ bzw. $[(2,0)] \odot ((a,b)] = [(a,b)] \oplus [(a,b)]$ unter Verwendung der Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen.

Beispiel 3. Zeigen Sie das Distributivgesetz für ganze Zahlen, also

$$[(a,b)] \odot ([(c,d)] \oplus [(e,f)]) = [(a,b)] \odot [(c,d)] \oplus [(a,b)] \odot [(e,f)],$$

für alle $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ und $[(e,f)]$ in $\mathbb{Z}$.

Beispiel 4. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\boxdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$[(a,b)] \boxdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$$

wohl definiert ist.

Beispiel 5. Finden Sie für eine beliebige nicht leeren endlichen Menge M eine Bijektion zwischen der Menge der Teilmengen von M mit gerader Machtigkeit und der Menge der Teilmengen von M mit ungerader Machtigkeit.

Beispiel 6. Es sei M eine nicht leere Menge und $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $M \to \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass es keine Bijektion zwischen M und $\mathcal{F}$ geben kann und leiten Sie daraus ab, dass die Potenzmenge einer Menge stets mehr Elemente als die Menge selbst hat.

Hinweis: Angenommen es gäbe eine Bijektion $f : M \to \mathcal{F}$, dann betrachten Sie die Funktion $g : M \to \{0,1\}$, die jedes $m \in M$ abbildet auf

$$g(m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f(m)(m) = 0 \\ 0, & \text{falls } f(m)(m) = 1 \end{cases}.$$

Beispiel 7. Finden Sie rekursive Darstellungen (mit Anfangsbedingung) und explizite Darstellungen der Folgen

(1) $5, 7, 9, 11, 13, 15 \dots$
(2) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$
(3) $4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

Beispiel 8. Ist die Folge (x_n) mit

$$x_n = \frac{n-1}{n^2+2}$$

ab einer Stelle monoton oder alternierend? Wenn ja, ab welcher Stelle? Ist die Folge beschränkt? Hinweis: Berechnen Sie die ersten Glieder der Folge, leiten Sie daraus Vermutungen ab und beweisen Sie diese Vermutungen dann.

Beispiel 9. Eine rationale Folge ist rekursiv gegeben durch $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$.

(1) Für welche Werte von x_0 ist diese Folge monoton steigend, monoton fallend, konstant, beschränkt bzw. alternierend?
(2) Bestimmen Sie x_n explizit (nur in Abhängigkeit von x_0).

Beispiel 10. Wie Übungsbeispiel 9 nur mit $x_{n+1} = -2x_n + 1$.

Beispiel 11. Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Es sei

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Folgen $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$.
Hinweis: Berechnen Sie die ersten Werte und leiten Sie daraus eine Vermutung ab. Diese beweisen Sie dann z.B. indem sie die Rekursionsgleichung im Zähler der Folgenglieder anwenden. Sollten Sie bereits etwas über Konvergenz von Folgen wissen: Das werden wir auch für diese Folge zu einem späteren Zeitpunkt behandeln.