

KFK Operations Research I

Zwischentest am 21.11.2007

Andrea Gaunersdorfer

1. Gegeben ist folgendes lineare Programm:

$$Z = 8x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 10x_5 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} A_1 : \quad & 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 6000 \\ A_2 : \quad & 5x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 2100 \\ A_3 : \quad & 12x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 20x_4 + 10x_5 \leq 1200 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Die Variablen x_i ($i = 1, \dots, 5$) bezeichnen die produzierten Mengeneinheiten (ME) von fünf Produkten P_i ($i = 1, \dots, 5$). Jedes der Produkte durchläuft drei Arbeitsprozesse A_1, A_2, A_3 auf drei Maschinen. Der Kapazitätsbedarf an Maschinenstunden pro ME der einzelnen Produkte und die Maschinenstunden, die zur Verfügung stehen, werden durch die drei Nebenbedingungen beschrieben. Die Zielfunktion beschreibt den Gesamtgewinn, der durch die Herstellung der fünf Produkte erwirtschaftet wird.

Es stellt sich heraus, dass es optimal ist nur Produkt P_2 zu produzieren, wobei die verfügbare Kapazität von A_3 vollständig ausgeschöpft wird.

- Wie lautet das optimale Produktionsprogramm? Wie viele Maschinenstunden bleiben ungenützt?
- Formulieren Sie das duale Programm und beweisen Sie die Optimalität der in (a) ermittelten Lösung.
- Sind die Lösungen des primalen und des dualen Programms eindeutig? (Begründung!)
- Interpretieren Sie das duale Programm und dessen optimale Lösung.
Wie groß müssten die Deckungsbeiträge von P_1, P_3, P_4, P_5 sein, damit es optimal wäre, diese zu produzieren?

(20 Punkte)

2. Betrachten Sie das folgende Lineare Programm (LP):

$$Z = 5x_1 + 15x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1, \dots, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie alle Basislösungen des LP. Welche sind zulässig, welche unzulässig?

(b) Die Inverse der Basismatrix zur Basis $\{x_1, x_3\}$ lautet $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Schreiben Sie das zur Basis gehörige Simplextableau an und ermitteln Sie gegebenenfalls unter Anwendung des (dualen) Simplexverfahrens eine optimale Lösung des Programms.

(c) Ist die in (b) ermittelte Lösung eindeutig?

Falls ja, geben Sie eine Begründung an.

Falls nein, schreiben Sie alle optimalen Lösungen des LP an.

(18 Punkte)

3. Gegeben ist folgendes LP:

$$Z = 5x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}10x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 24 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 15 \\10x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 30 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

(a) Formulieren Sie das duale Programm. Schreiben Sie dieses mit möglichst wenigen Variablen und Nebenbedingungen an.

(b) Lassen sich das primale Programm und/oder das duale Programm als spezielles Maximumproblem anschreiben?

Wenn ja, schreiben Sie es als solches an. Wenn nein, warum nicht?

(c) Schreiben Sie die Normalformen des primalen und des dualen Programms an.

(12 Punkte)