KFK Operations Research I

Endtest am 30. 1. 2008

Andrea Gaunersdorfer

1. Lösen Sie folgendes LP mittels 2-Phasen-Methode:

$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(10 Punkte)

2. Gegeben ist folgendes LP:

$$Z = 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 2x_4 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 &\leq 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eine Optimierung mit dem Simplexverfahren ergab folgendes Tableau:

B	L	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x_3	1	-1	0	1	-1	0	1	0
x_2	2	0	1	0	1	1	1	0
y_3	4	1	0	0	3	1	0	1
Z	15	1	0	0	19	12	3	0

(a) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielfunktionskoeffizienten durch.

(b) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktionskonstanten durch.

Überprüfen Sie, ob nach folgenden Änderungen die oben ermittelte Lösung jeweils optimal bleibt und ermitteln Sie ggf. die neue optimale Lösung.

(c) Ändern Sie die Koeffizienten von x_4 zu $\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(d) Führen Sie eine neue Variable mit Koeffizienten $\begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein.

(e) Führen Sie eine neue Restriktion ein: $x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 5$.

(20 Punkte)

3. Ein Investor hat 5000 €, welche er in zwei Wertpapiere investieren kann. Die erwartete Rendite der beiden Wertpapiere beträgt 20% bzw. 16%. Das Risiko, gemessen durch die Varianz der Renditen, ist gegeben durch $2x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2$, wobei x_i $(i=1,2)$ die Beträge in Einheiten von 1000 € bezeichnen. Der Investor möchte eine möglichst große erwartete Rendite bei möglichst kleinem Risiko erzielen. Um dieses Ziel zu erreichen maximiert er folgende Nutzenfunktion

$$f(x_1,x_2) = 20x_1 + 16x_2 - \theta[2x_1^2 + x_2^2 + (x_1+x_2)^2]$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x) = x_1 + x_2 &\le 5, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

($\theta > 0$ ist ein Koeffizient, der den Grad der Risikaversion des Investors charakterisiert.)

(a) Für welche Werte von θ handelt es sich um ein reguläres konvexes Programm?

(b) Ermitteln Sie die optimale Lösung für $\theta = \frac{1}{2}$. Überprüfen Sie, ob der optimale Punkt die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt.

(c) Interpretieren Sie den Lagrange-Multiplikator und die Kuhn-Tucker-Bedingungen.

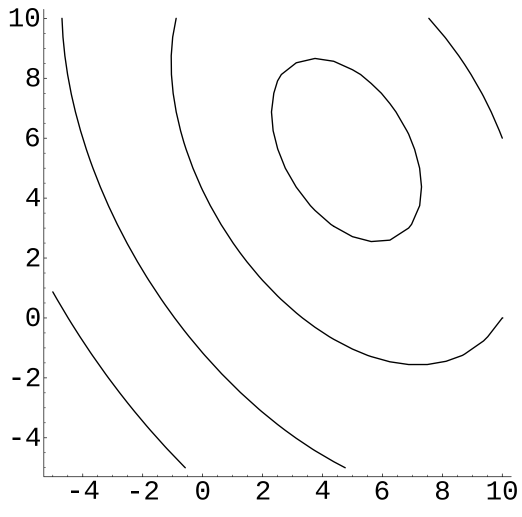
(d) Ermitteln Sie die optimale Lösung für $\theta = -1$. Überprüfen Sie, ob der optimale Punkt die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt.

Zeigen Sie, dass es einen nicht-optimalen Punkt gibt, welcher die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt.
(Hinweis: Betrachten Sie den optimalen Fall aus (a).)

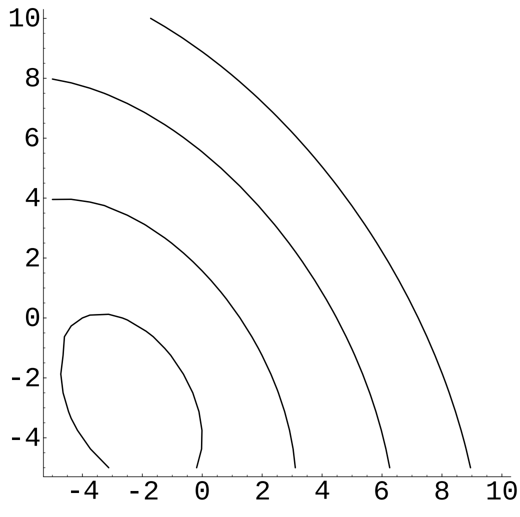
Erklären Sie, warum dies auftreten kann.

Folgende Abbildungen zeigen die Niveaulinien der Zielfunktionen:

$\theta = \frac{1}{2}$:



$\theta = -1$:



(20 Punkte)