KFK Operations Research I

Endtest am 1. 2. 2006

Andrea Gaunersdorfer

1. Ein landwirtschaftlicher Betrieb hat eine Größe von 45 Hektar Land. Der Boden wird sowohl zur Weizen- als auch zur Maisproduktion verwendet. Der Gewinn pro bebautem Hektar Weizen beträgt 150 GE, jener von Mais 200 GE. Um einen Hektar Weizen zu ernten werden 6 Arbeitsstunden benötigt, für einen Hektar Mais 10 Arbeitsstunden. Arbeiter können für maximal 350 Arbeitsstunden eingesetzt werden, eine Arbeitsstunde kostet 10 GE.

   Um den Gewinn zu maximieren, muss daher folgendes LP gelöst werden:

$$Z = 150x_1 + 200x_2 - 10x_3 \to \max$$

u.d.NB:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &\leq 45 \\ 6x_1 + 10x_2 - x_3 &\leq 0 \\ x_3 &\leq 350 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Hektar Land, das mit Weizen bebaut wird} \\ x_2 &= \text{Hektar Land, das mit Mais bebaut wird} \\ x_3 &= \text{eingesetzte Arbeitsstunden} \end{aligned}$$

Eine Optimierung mittels Simplexverfahren ergab folgendes Tableau:

B	L	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	25	1	0	0	2.5	−0.25	−0.25
x_2	20	0	1	0	−1.5	0.25	0.25
x_3	350	0	0	1	0	0	1
Z	4250	0	0	0	75	12.5	2.5

x_4, x_5, x_6 bezeichnen die Schlupfvariablen der Nebenbedingungen.

(a) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für die Zielfunktionskoeffizienten durch.
Für welche Werte der Zielfunktionskoeffizienten ist die derzeitige Lösung optimal?

(b) Wie sehr kann die Betriebsgröße bzw. die Zahl der verfügbaren Arbeitsstunden variiert werden, sodass die derzeitige Basis optimal bleibt?

Wie groß ist der Gewinn, wenn nur 40 Hektar Land bebaut werden können?

Was ist der Betrieb maximal bereit für eine zusätzliche Arbeitsstunde zu bezahlen?
Was ist der Betrieb maximal bereit für ein zusätzliches Hektar Land zu bezahlen?

(c) Es wird überlegt, Gerste anzubauen. Ein mit Gerste bebauter Hektar Land bringt einen Ertrag von 120 GE und erfordert 3 Arbeitsstunden. Soll Gerste angebaut werden?

(24 Punkte)

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Zweiphasenmethode, dass folgendes LP keine zulässige Lösung hat.

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

u.d.NB

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

3. Gegeben ist folgendes nichtlineare Programm

$$f(x_1, x_2) = 10x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$$

u.d.NB

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2^2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um ein reguläres konvexes Programm handelt und ermitteln Sie die optimale Lösung des Programms.

Hinweis: Untenstehende Grafik zeigt die Niveaulinien der Zielfunktion.

(b) Angenommen, x_1 und x_2 bezeichnen die hergestellten Mengen von zwei Produkten. Die Zielfunktion beschreibt den Erlös aus diesen Produkten und die Nebenbedingungen die Ressourcenbeschränkungen. Interpretieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen für die optimale Lösung.

(c) $f(x_1, x_2)$ soll nun minimiert werden und die zweite Nebenbedingung ändert sich zu

$$x_1 - x_2^2 \leq 0.$$

Ermitteln Sie grafisch die optimale Lösung und erklären Sie, warum die Regularitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

(20 Punkte)