Parameter des Binomialmodells

Die Parameter des Binomialmodells werden so bestimmt, daß für $\Delta t \ll 1$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] \approx r\Delta t \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] \approx \sigma^2 \Delta t$$

gilt. Genauer:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{E}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = r \qquad \text{und} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{Var}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = \sigma^2.$$

Der Parameter σ heißt Volatilität (annualisierte Standardabweichung der Wachstumsrate des Aktienkurses).

Folgende Wahl der Parameter erfüllt diese Eigenschaften:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{1}$$

oder

$$u = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Im folgenden verwenden wir folgende Formeln:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \tag{4}$$

und vernachlässigen alle Terme, in denen Δt mit einer Potenz > 1 vorkommt, also $(\Delta t)^{3/2}$, $(\Delta t)^2$ usw., da $(\Delta t)^{3/2} \ll \Delta t$, $(\Delta t)^2 \ll \Delta t$, falls $\Delta t \ll 1$, genauer:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta t)^{3/2}}{\Delta t} = 0, \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} = 0, \ \text{usw.}$$

Wir zeigen nun die oben genannten Eigenschaften.

Parameter (1):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{S_{t+\Delta t}-S_t}{S_t}\right] \\
&= pu + (1-p)d - 1 \\
&= p(u-d) + d - 1 \\
&= e^{r\Delta t} - d + d - 1 \\
&\overset{(3)}{\approx} 1 + r\Delta t - 1 \\
&= r\Delta t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2\right] - \underbrace{\left(\mathrm{E}\left[\frac{\Delta S}{S}\right]\right)^2}_{r^2\Delta t^2 \ll \Delta t} \\
&\approx \mathrm{E}\left[\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - 1\right)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)^2\right] - 2\mathrm{E}\left[\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right] + 1 \\
&= pu^2 + (1-p)d^2 - 2(r\Delta t + 1) + 1 \\
&= p\underbrace{(u^2-d^2)}_{(u-d)(u+d)} + d^2 - 2r\Delta t - 1 \\
&= (e^{r\Delta t} - d)(u+d) + d^2 - 2r\Delta t - 1 \\
&= e^{r\Delta t}(u+d) - \underbrace{ud}_{1} - d^2 + d^2 - 2r\Delta t - 1 \\
&= e^{r\Delta t}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) - 2r\Delta t - 2 \\
&\overset{(3)}{\approx} (1 + r\Delta t)\left(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right) - 2r\Delta t - 2 \\
&= 2 + \sigma^2\Delta t + 2r\Delta t + \underbrace{r\sigma^2\Delta t^2}_{\ll \Delta t} - 2r\Delta t - 2 \\
&\approx \sigma^2\Delta t
\end{aligned}
$$

Parameter (2):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] &= \ldots = p(u-d)+d-1 \\
&= \frac{1}{2}e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) + e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1 \\
&= \frac{1}{2}e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) - 1 \\
&\overset{(3)}{\approx} \frac{1}{2}\left(1+(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t\right)\left(1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t\right)(2+\sigma^2\Delta t) - 1 \\
&\approx 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + r\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t - 1 \\
&= r\Delta t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\frac{\Delta S}{S}\right] &= \ldots = p(u^2-d^2)+d^2-2r\Delta t-1 \\
&= \frac{1}{2}e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t)}\left(e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) - 2r\Delta t - 1 \\
&\overset{(3)}{\approx} \frac{1}{2}\left(1+2(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t\right)\left(1+2\sigma\sqrt{\Delta t}+2\sigma^2\Delta t+1-2\sigma\sqrt{\Delta t}+2\sigma^2\Delta t\right) - 2r\Delta t - 1 \\
&= \left(1+2(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t\right)(1+2\sigma^2\Delta t) - 2r\Delta t - 1 \\
&\approx 1 + 2(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + 2\sigma^2\Delta t - 2r\Delta t - 1 \\
&= \sigma^2\Delta t
\end{aligned}
$$

Verteilung der Aktienkurse

Die Renditen von Aktienkursen zwischen t und T sind im Grenzfall $\Delta t \to 0$ normalverteilt. Wenn risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden, lautet die Verteilung

$$\ln \frac{S_T}{S} \sim \mathcal{N}((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t}),$$

wobei $\mathcal{N}(m,s)$ die Normalverteilung mit Erwartungswert m und Standardabweichung s bezeichnet.

Der Aktienkurs S_T ist im Grenzfall lognormalverteilt,

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t}).$$

Um diese Aussagen zu zeigen, betrachten wir das Binomialmodell mit Parametern (2).

Entwicklung des Aktienkurses in einer Periode:

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \\ S_t d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2, \end{cases}$$

wobei

$$u = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad d = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Anders formuliert,

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\xi_t \sigma\sqrt{\Delta t}},$$

wobei (ξ_t) eine Folge von voneinander unabhängigen, binomialverteilten Zufallsvariablen mit

$$\xi_t = \begin{cases} +1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \end{cases}$$

ist.

$\Delta t = \dfrac{T}{N}$, N = Anzahl der Perioden; $\quad \Delta t \to 0$, wenn $N \to \infty$.

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \prod_{t=1}^{N} e^{\xi_t \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ &\overset{(3)}{\approx} S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \prod_{t=1}^{N} (1 + \xi_t \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} \underbrace{\xi_t^2}_{1} \sigma^2 \Delta t) \\ \Rightarrow \quad \ln S_T &\approx \ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sum_{t=1}^{N} \ln(1 + \xi_t \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t) \\ &\approx \ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} \sum_{t=1}^{N} \frac{\xi_t}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

da

$$\ln(1+\xi_t\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t) \overset{(4)}{\approx} \xi_t\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t - \underbrace{\frac{1}{2}(\xi_t\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t)^2}_{\approx \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \quad (\text{da } \xi_t^2 \equiv 1)} \approx \xi_t\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{N} \ln(1+\xi_t\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t) \approx \sigma\sqrt{T}\sum_{t=1}^{N}\frac{\xi_t}{\sqrt{N}}.$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\sum_{t=1}^{N}\frac{\xi_t}{\sqrt{N}} \to \varepsilon, \quad \text{wenn } N \to \infty,$$

wobei $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, daher

$$\begin{aligned} \ln S_T &\approx \ln S_0 + (r-\frac{\sigma^2}{2})T + \varepsilon\sigma\sqrt{T} \\ \Rightarrow\ \ln\frac{S_T}{S_0} &\approx (r-\frac{\sigma^2}{2})T + \varepsilon\sigma\sqrt{T} \\ \Rightarrow\ \ln\frac{S_T}{S_0} &\sim \mathcal{N}((r-\frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma\sqrt{T}) \\ \Rightarrow\ \ln S_T &\sim \mathcal{N}(\ln S_0 + (r-\frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma\sqrt{T}) \end{aligned}$$

Die Verteilung auf Basis der objektiven Wahrscheinlichkeiten erhält man, wenn der risikolose Zinssatz r durch die Wachstumsrate des Aktienkurses μ ersetzt wird.