Indexoptionen, Devisenoptionen und Futuresoptionen

sind ähnlich zu Aktien mit kontinuierlicher Dividendenzahlung, Dividendenrendite q

Index: $q \hat{=}$ durchschnittliche Dividendenrendite auf Aktien, aus denen sich der Index zusammensetzt

Fremdwährung: $q \hat{=}$ Fremdwährungszinssatz r_f

Futures: $q \hat{=}$ heimischer Zinssatz r

Optionen auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q

Wachstumsrate des Aktienkurses ist um Faktor q niedriger als ohne Dividendenzahlungen

Zeitpunkt	$t = 0$	$t = T$
mit Dividendenrendite q	S	S_T
ohne Dividenden	S	$S_T e^{qT}$
oder	Se^{-qT}	S_T

$\Rightarrow$ Um eine europäische Option auf ein Underlying mit einer kontinuierlichen Dividendenrendite q zu bewerten, reduzieren wir den Kurs des Underlyings von S auf Se^{-qT} und bewerten die Option so, als ob das Underlying keine Dividenden auszahlen würde.

Put-Call-Parität

Portefeuille A: europ. Call-Option, Cash in Höhe Xe^{-rT}
Portefeuille B: europ. Put-Option, e^{-qT} Aktien,
wobei die Dividenden in die Aktie reinvestiert werden

Zeitpunkt	Wert PF A	Wert PF B
$t = 0$:	$c + Xe^{-rT}$	$p + e^{-qT} S$
$t = T$:	$\max\{S_T - X, 0\} + X$	$\max\{X - S_T, 0\} + S_T$
	$= \max\{S_T, X\}$	$= \max\{X, S_T\}$

$$\Rightarrow \quad c + Xe^{-rT} = p + e^{-qT} S$$

Black-Scholes-Formel

ersetze in B/S-Formel S durch Se^{-qT}:

$$
\begin{aligned}
c &= Se^{-qT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \\
p &= Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{X} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

da

$$\ln\left(\frac{Se^{-qT}}{X}\right) = \ln\frac{S}{X} - qT$$

risikoneutrale Bewertung:

erwartete Wachstunsrate des Underlyings

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = r - q$$

Binomialmodell

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d} \\
u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}
$$

Zwischen Call- und Put-Devisenoptionen gibt es eine gewisse Symmetrie:

Put-Option:
Recht X_A EH von Währung A zu einem Preis von X_B EH von Währung B zu verkaufen
$\hat{=}$ Call-Option:
Recht X_B EH von Währung B zu einem Preis von X_A EH von Währung A zu kaufen

Modell von Black (Bewertung von Futures-Optionen):

Falls $r = \text{const}$ und für alle Laufzeiten gleich $\Rightarrow$ Futures-Preis = Forward-Preis $F = Se^{rT}$ $(F = \hat{E}(F_T) = \hat{E}(S_T))$

$$
\begin{aligned}
c &= e^{-rT}(FN(d_1) - XN(d_2)) \\
p &= e^{-rT}(XN(-d_2) - FN(d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{X} + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\ln\frac{F}{X} - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

Mit der selben Formel läßt sich der Preis von Devisenoptionen mittels forward exchange rate F ausdrücken, wobei

$$F = Se^{(r-r_f)T}$$