Optionen: Formelsammlung

Bezeichnungen:

S ... aktueller Aktienkurs (Kurs des Underlyings)
X ... Ausübungspreis
T ... Verfallszeitpunkt der Option
t ... Bewertungszeitpunkt
r ... risikoloser Zinssatz (kontinuierliche Verzinsung)
σ ... Volatilität des Underlyings
μ ... Wachstumsrate des Aktienkurses (in infinitesimalem Zeitintervall)
c ... Preis einer europäischen Call-Option
p ... Preis einer europäischen Put-Option

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \text{(kumulierte Normalverteilung)}$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Put-Call-Parität für europäische Optionen

auf Aktien ohne Dividenden:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

auf Aktien mit Dividendenzahlung D zum Zeitpunkt τ:

$$c + Xe^{-r(T-t)} + De^{-r(\tau-t)} = p + S$$

auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + Se^{-q(T-t)}$$

Parameter für das Binomialmodell:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

oder

$$u = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{1}{2}$$

Verteilung der Aktienkurse:

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t})$$

Black-Scholes Formel:

europäische Call- bzw. Put-Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$
\begin{aligned}
c &= SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
p &= Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

europäische Call- bzw. Put-Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$
\begin{aligned}
c &= Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
p &= Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{X} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Delta:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$
\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Delta_c = N(d_1) \\
&\text{Put:} \quad \Delta_p = N(d_1) - 1
\end{aligned}
$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$
\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Delta_c = e^{-q(T-t)}N(d_1) \\
&\text{Put:} \quad \Delta_p = e^{-q(T-t)}(N(d_1) - 1)
\end{aligned}
$$

Gamma:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Theta:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$\text{Call:} \quad \Theta_c = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-q(T-t)}N(d_2)$$
$$\text{Put:} \quad \Theta_p = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-q(T-t)}N(-d_2)$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$\text{Call:} \quad \Theta_c = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + qSN(d_1)e^{-q(T-t)} - rXe^{-q(T-t)}N(d_2)$$
$$\text{Put:} \quad \Theta_p = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} - qSN(-d_1)e^{-q(T-t)} + rXe^{-q(T-t)}N(-d_2)$$

Vega:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$\mathcal{V} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$\mathcal{V} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)e^{-q(T-t)}$$

Rho:

europäische Option (mit oder ohne kontinuierlicher Dividendenrendite):

$$\text{Call:} \quad \rho_c = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$\text{Put:} \quad \rho_p = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Rho für Fremdwährungszinssatz r_f für europäische Währungsoptionen:

$$\text{Call:} \quad \rho_{f,c} = -(T-t)e^{-r_f(T-t)}SN(d_1)$$
$$\text{Put:} \quad \rho_{f,p} = (T-t)e^{-r_f(T-t)}SN(-d_1)$$