Optionen: Formelsammlung

Bezeichnungen:

S_0 ... aktueller Aktienkurs (Kurs des Underlyings)
X ... Ausübungspreis
T ... Laufzeit der Option
r ... risikoloser Zinssatz (kontinuierliche Verzinsung)
σ ... Volatilität des Underlyings
μ ... Wachstumsrate des Aktienkurses (in infinitesimalem Zeitintervall)
c ... Preis einer europäischen Call-Option
p ... Preis einer europäischen Put-Option

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \text{(kumulierte Normalverteilung)}$$
$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Put-Call-Parität für europäische Optionen

auf Aktien ohne Dividenden:

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0$$

auf Aktien mit Dividendenzahlung D zum Zeitpunkt τ:

$$c + Xe^{-rT} + De^{-r\tau} = p + S_0$$

auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0 e^{-qT}$$

Parameter für das Binomialmodell:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}$$

oder

$$u = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{1}{2}$$

Verteilung der Aktienkurse:

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T})$$

Black-Scholes Formel:

europäische Call- bzw. Put-Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$
\begin{aligned}
c &= S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \\
p &= X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

europäische Call- bzw. Put-Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$
\begin{aligned}
c &= S_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \\
p &= X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{X} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

Delta:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$
\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Delta_c = N(d_1) \\
&\text{Put:} \quad \Delta_p = N(d_1) - 1
\end{aligned}
$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$
\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Delta_c = e^{-qT} N(d_1) \\
&\text{Put:} \quad \Delta_p = e^{-qT}(N(d_1) - 1)
\end{aligned}
$$

Gamma:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$
\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}
$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$
\Gamma = \frac{N'(d_1) e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}
$$

Theta:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Theta_c = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rXe^{-qT}N(d_2) \\
&\text{Put:} \quad \Theta_p = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rXe^{-qT}N(-d_2)
\end{aligned}$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \Theta_c = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1)e^{-qT} - rXe^{-qT}N(d_2) \\
&\text{Put:} \quad \Theta_p = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1)e^{-qT} + rXe^{-qT}N(-d_2)
\end{aligned}$$

Vega:

europäische Option auf Aktien ohne Dividenden:

$$\mathcal{V} = S_0\sqrt{T}N'(d_1)$$

europäische Option auf Aktien mit kontinuierlicher Dividendenrendite q:

$$\mathcal{V} = S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$$

Rho:

europäische Option (mit oder ohne kontinuierlicher Dividendenrendite):

$$\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \rho_c = XTe^{-rT}N(d_2) \\
&\text{Put:} \quad \rho_p = -XTe^{-rT}N(-d_2)
\end{aligned}$$

Rho für Fremdwährungszinssatz r_f für europäische Währungsoptionen:

$$\begin{aligned}
&\text{Call:} \quad \rho_{f,c} = -Te^{-r_fT}S_0N(d_1) \\
&\text{Put:} \quad \rho_{f,p} = Te^{-r_fT}S_0N(-d_1)
\end{aligned}$$