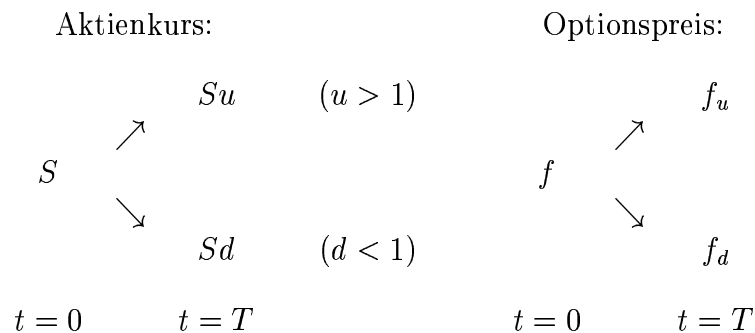


einperiodiges Binomialmodell allgemein:



Portfolio: 1 Option short, Δ Aktien

Das Portfolio ist risikolos, falls

$$\begin{aligned} \Delta \cdot Su - f_u &= \Delta \cdot Sd - f_d \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{f_u - f_d}{Su - Sd} \end{aligned}$$

Wert des Portfolios zu $t = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot S - f &= (\Delta \cdot Su - f_u)e^{-rT} \\ \Rightarrow f &= \Delta \cdot S - \Delta \cdot Sue^{-rT} + f_u e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{Su - Sd} S(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} \\ &= e^{-rT} \left[f_u \underbrace{\frac{e^{rT} - u + u - d}{u - d}}_{=: p} - f_d \frac{e^{rT} - u}{u - d} \right] \end{aligned}$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \in]0, 1[\Leftrightarrow e^{rT} < u \quad (*)$$

$$1 - p = \frac{-e^{rT} + u}{u - d}$$

$$\Rightarrow f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d]$$

(*) Diese Annahme ist sinnvoll, da eine risikobehaftete Veranlagung im „guten“ Zustand einen höheren Ertrag als den risikolosen Zinssatz haben muß.

p kann als Wahrscheinlichkeit für den Kursanstieg interpretiert werden. Der Wert der Option entspricht dann der diskontierten erwarteten Auszahlung.

erwarteter Aktienkurs unter dieser Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} E(S_T) &= pSu + (1-p)Sd \\ &= pS(u-d) + Sd \\ &= S(e^{rT} - d) + Sd = Se^{rT} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p$ entspricht der *riskoneutralen Wahrscheinlichkeit*.