einperiodiges Binomialmodell allgemein:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{Aktienkurs:}} & & \multicolumn{3}{c}{\text{Optionspreis:}} \\
 & & Su & (u>1) & & & & f_u \\
 & \nearrow & & & & & \nearrow & \\
S & & & & & f & & \\
 & \searrow & & & & & \searrow & \\
 & & Sd & (d<1) & & & & f_d \\
t=0 & & t=T & & & t=0 & & t=T
\end{array}$$

Portfolio: 1 Option short, Δ Aktien

Das Portfolio ist risikolos, falls

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot Su - f_u &= \Delta \cdot Sd - f_d \\
\Rightarrow \quad \Delta &= \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}
\end{aligned}$$

Wert des Portfolios zu $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot S - f &= (\Delta \cdot Su - f_u)e^{-rT} \\
\Rightarrow \quad f &= \Delta \cdot S - \Delta \cdot Sue^{-rT} + f_u e^{-rT} \\
&= \frac{f_u - f_d}{Su - Sd} S(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} \\
&= e^{-rT}\Big[f_u \underbrace{\frac{e^{rT} - u + u - d}{u - d}}_{=:\, p} - f_d \frac{e^{rT} - u}{u - d}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{e^{rT} - d}{u - d} \in \,]0,1[\quad \Leftrightarrow \quad e^{rT} < u \quad (*) \\
1 - p &= \frac{-e^{rT} + u}{u - d} \\
\Rightarrow \quad f &= e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]
\end{aligned}$$

(*) Diese Annahme ist sinnvoll, da eine risikobehaftete Veranlagung im „guten“ Zustand einen höheren Ertrag als den risikolosen Zinssatz haben muß.

p kann als Wahrscheinlichkeit für den Kursanstieg interpretiert werden. Der Wert der Option entspricht dann der diskontierten erwarteten Auszahlung.

erwarteter Aktienkurs unter dieser Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} E(S_T) &= pSu + (1-p)Sd \\ &= pS(u-d) + Sd \\ &= S(e^{rT} - d) + Sd = Se^{rT} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ p entspricht der *riskoneutralen Wahrscheinlichkeit.*