

**Thomas Dangl, Engelbert J. Dockner, Andrea Gaunersdorfer,  
Alexander Pfister, Leopold Sögner, Günter Strobl<sup>1</sup>**

## **Adaptive Erwartungsbildung und Finanzmarktdynamik<sup>2</sup>**

### **Zusammenfassung**

Aufbauend auf einem klassischen Finanzmarktmodell behandeln wir drei Modellvarianten, die jeweils einen anderen Ansatz der (heterogenen) Erwartungsbildung von Investoren über künftige Wertpapierpreise in den Vordergrund der Betrachtungen rücken: das Konzept der konsistenten Erwartungen, das Konzept der „Adaptive Belief Systeme“ und künstliche Finanzmärkte, wo die Modellierung der Erwartungsbildung mittels „Classifier Systemen“ erfolgt. Wir untersuchen, welche Auswirkungen diese unterschiedlichen Mechanismen der Erwartungsbildung auf die Gleichgewichtsdynamik von Wertpapierkursen haben und vergleichen statistische Eigenschaften von Renditen der mittels dieser Modelle generierten Kurszeitreihen mit jenen realer Daten.

### **Adaptive Expectations Formation and the Dynamics of Financial Markets**

#### **Summary**

Based on a classical financial market model we discuss three model variants, each focusing on a different approach in the formation of (heterogeneous) beliefs about future asset prices: the concept of Consistent Expectations, the concept of Adaptive Belief Systems, and artificial financial markets, where beliefs (or expectations) are formed by Classifier Systems. We analyze the consequences of these different mechanisms of expectations formation on the equilibrium dynamics of asset prices and compare statistical properties of returns generated by these models with the characteristics of real world time series.

---

<sup>1</sup>Dr. *Thomas Dangl*, Prof. Dr. *Engelbert Dockner*, Dr. *Andrea Gaunersdorfer*, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Universität Wien, Brünner Straße 27, A-1210 Wien,  
Mag. *Alexander Pfister*, Dr. *Leopold Sögner*, Abteilung für Quantitative Volkswirtschaftslehre, Wirtschaftsuniversität Wien, Augasse 2-6, A-1090 Wien,  
Mag. *Günter Strobl*, Finance Department, The Wharton School, University of Pennsylvania, 2300 Steinberg Hall – Dietrich Hall, 3620 Locust Walk, Philadelphia, PA 19104-6367

<sup>2</sup>Diese Arbeit wurde vom Österreichischen Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung, Projekt SFB#010 (‘Adaptive Information Systems and Modelling in Economics and Management Science’) unterstützt.

# 1 Einleitung

Zwei zentrale Paradigmen der traditionellen Theorie der Kapitalmärkte sind das Konzept der rationalen Erwartungsgleichgewichte (rational expectations equilibria, REE) und die Effizienzmarkthypothese (EMH). Bei dem von *Muth* (1961) eingeführten Konzept der rationalen Erwartungen wird davon ausgegangen, dass die Akteure im folgenden Sinn perfekt rational agieren. Sie berücksichtigen in ihren Preiserwartungen sofort alle verfügbaren Informationen, sind in der Lage, beliebig komplizierte logische Schlussfolgerungen zu ziehen und bestimmen ihre Nachfrage nach den Wertpapieren auf Basis eines allgemein bekannten Modells. Der aktuelle Preis sollte demnach alle relevanten Informationen widerspiegeln, und es ist nicht möglich, systematische Überrenditen zu erzielen (EMH). Preise sollten sich daher nur ändern, wenn neue Informationen auf den Märkten eintreffen, Risiken in der Preisentwicklung sind auf exogene Entwicklungen zurückzuführen.

Obwohl es Hinweise gibt (zum Beispiel häufig auftretende Phasen hoher Volatilitäten, die nicht allein mittels ökonomischer Fundamentaldaten erklärt werden können), dass psychologische Aspekte eine bedeutende Rolle in Finanzmärkten spielen, ist bisher keine allgemein akzeptierte Theorie, die dies in Betracht zieht, entwickelt worden. In der traditionellen Theorie werden Marktpsychologie und technische Analysen (Charttechniken) als irrationales Verhalten betrachtet. Um bei diesen Ansätzen konzeptuelle Probleme wie „No-Trade“ Theoreme zu vermeiden, werden oft „Noise Traders“ („Uninformed Traders“) oder „Liquidity Traders“ (Akteure, deren Handeln durch das Modell nicht erklärt, sondern als exogen gegeben betrachtet wird) eingeführt. Einen Überblick über diese Literatur findet man zum Beispiel in *Brunnermeier* (1998).

*Kleidon* (1995) betont, dass es Situationen geben kann, in denen Investoren unsicher über das Verhalten anderer Investoren sein können, was zu momentanen Abweichungen vom rationalen Erwartungsgleichgewicht führen kann. Modelle, die nicht von irrationalem Verhalten der Investoren ausgehen, sondern die Annahme abschwächen, dass Preise jede Information, welche die Investoren besitzen, widerspiegeln – also eine Abweichung vom REE und daher Bubbles und Crashes zulassen – können für das Verständnis von Vorkommnissen auf Finanzmärkten wie die Crashes im Oktober 1987 und 1989 hilfreich sein.

In dieser Arbeit präsentieren wir Ansätze, deren Ziel es ist, zu verstehen, was in realen Märkten vorgeht, das heißt die statistischen Eigenschaften von Finanzdaten und die Kräfte, die für diese Eigenschaften verantwortlich sind. Ein solches Verständnis ist einerseits notwendig, um vernünftige regulatorische Rahmenbedingungen auf Finanzmärkten zu schaffen, andererseits ist es auch für das Risikomanagement von Bedeutung.

In diesem Zusammenhang scheint es angebracht, einen Überblick sogenannter „Stylized Facts“, welche in realen Finanzzeitreihen beobachtet werden, zu präsentieren. Eine Diskussion dieser Fakten findet man zum Beispiel in *Brock* (1997, siehe auch die dort angegebenen Literaturhinweise), in *Daniel et al.* (1998) und in *Pagan* (1996), *Haugen* (1998) diskutiert „Seven Mysteries of the Stock Market“. Einige dieser Stylized Facts sind:

- Große Volatilität der Aktienkurse, die nicht mittels Fundamentaldaten (wie Dividenden und zugrundeliegende Cash Flows) erklärt werden kann.
- Die Volatilität selbst ist zu instabil, das heißt, sie ist im Zeitablauf großen Schwankungen unterworfen (Heteroskedastizität).
- Die Volatilität der Preisänderungen weist eine hohe Persistenz auf („volatility clustering“), das heißt, großen Preisänderungen folgen tendenziell wiederum große Preisänderungen (mit gleichem oder unterschiedlichem Vorzeichen).
- Die Verteilung der Aktienkursänderungen ist leptokurtisch („fat tails“), was bedeutet, dass es im Vergleich zur Normalverteilung zu viele sehr kleine und zu viele extrem große Kursveränderungen gibt. Dieser Effekt ist umso stärker ausgeprägt, je höher die Frequenz der Daten ist.
- Wenn die Volatilität zunimmt, fallen die Kurse (was zu einer Erhöhung der Risikoprämie künftiger Markttrenditen führt, „leverage effect“). Diese Preisreaktion ist umso stärker, je größer der Volatilitätsshift ist.
- Die meisten starken Veränderungen in den Kursen und Volatilitäten können nicht durch ökonomische, politische oder andere relevante Ereignisse in der Welt erklärt werden.
- Die Volatilität ist größer in Zeiten, wenn die Finanzmärkte geöffnet sind (was nicht allein durch das Eintreffen von neuen Informationen erklärt werden kann). Die Volatilität über einem bestimmten Zeitraum nimmt zu (ab), wenn die Zahl der Handelsstunden höher (niedriger) ist (zum Beispiel Feiertage, Notierung auf mehreren internationalen Börsen).
- Unterreaktion auf Neuigkeiten wie zum Beispiel Aktiensplits, Dividendenauszahlungen oder unerwartete Erträge der Firmen.
- Die Autokorrelationsfunktionen von Renditen, Volatilitäten und Maßen für Handelsvolumina weisen für verschiedene Wertpapiere und Indizes ähnliche Eigenschaften auf.

Autokorrelationsfunktionen von Renditen sind für alle Lags ungefähr null (dies würde der EMH nicht widersprechen). Für Aktien- und Wechselkurse hoher Frequenz sind sie jedoch leicht negativ für kleine Lags, für Aktienindizes leicht positiv für alle Lags. Autokorrelationsfunktionen von Volatilitätsmaßen sind positiv für alle Lags. Sie klingen für Indizes und Wechselkurse langsam, für individuelle Aktien schneller ab. Autokorrelationen von Maßen von Handelsvolumina zeigen ähnliches Verhalten wie jene von Volatilitäten. Korrelationen zwischen Volatilitäten und Handelsvolumina sind groß und fallen rasch ab.

Ausgehend von diesen Beobachtungen stellt *Haugen* (1998) die Hypothese auf, dass sich die Volatilität von Aktienkursen aus drei Komponenten zusammensetzt,

- der „event-driven volatility“ (dieser Teil der Volatilität stammt von allgemeinen wirtschaftlichen und firmenspezifischen Veränderungen, er ist konsistent mit der EMH, ist aber nur für einen kleinen Teil der Volatilität verantwortlich),
- der „error-driven volatility“ (welche auf Über- und Unterreaktionen des Marktes – also auf „Fehler“ in der Preisbildung – zurückzuführen ist) und
- der „price-driven volatility“.

Die dritte Komponente der Volatilität führt *Haugen* darauf zurück, dass historische Preisveränderungen als Signal für weitere Handelsaktivitäten dienen. Investoren richten ihre Aufmerksamkeit auf Veränderungen des Marktindex. Die komplexe Natur des Prozesses, wie der Markt auf seine eigene Preishistorie reagiert,<sup>3</sup> verursacht weitere Preisveränderungen. Eine Ursache für diese Wechselwirkungen (Preisänderung bedingt weitere Preisänderung) kann über die Verhaltensweisen von Chartisten begründet werden. *Haugen* hält diese Komponente der Volatilität als den „by far most important part“.<sup>4</sup>

Weiters sind große Handelsvolumina und deren Persistenz ein Indiz dafür, dass heterogene Erwartungen eine Schlüsselrolle bei der Erklärung der beobachteten Muster in Finanzdaten sein könnten. Das Interesse an Modellen, wo versucht wird, Bewegungen am Markt durch Interaktionen heterogener Akteure zu erklären und wo Akteure die Beziehungen zwischen Preisen und Informationen lernen und ihre Erwartungen ständig adaptieren, hat in letzter Zeit stark zugenommen. Preisfluktuationen ergeben sich aufgrund von *beschränkt* rationalem Verhalten der Investoren und einer (evolutionären) Selektion verwendeter Handelsstrategien, die mittels eines Performancemaßes (zum Beispiel Profite in der Vergangenheit) bewertet werden. Beispiele für Modelle, die auf heterogenen Erwartungen der Akteure aufbauen und welche Ausgangspunkte von hier präsentierten Ansätzen bilden, sind *Brock/Hommes* (1997b, 1998, 1999) und die „künstlichen Finanzmärkte“ von *Arthur et al.* (1997) und *LeBaron et al.* (1999).<sup>5</sup>

*Grandmont* (1998) und *Hommes/Sorger* (1998) entwickeln Modelle, wo Erwartungen „selbsterfüllend“ werden. Die Akteure konzentrieren sich auf die empirische Konsistenz ihrer Vorhersagen, das heißt, Erwartungen über die Zukunft werden in einer Weise gebildet, die nicht systematisch falsch ist. Solche Erwartungsbildungsmodelle stellen geringere Anforderungen an die Rationalität der Akteure als dies beim REE der Fall ist.

Das Konzept der REE hat als normatives Modell der Erwartungsbildung sicherlich eine wichtige Bedeutung. Jedoch ist Kritik an diesem Konzept nicht unberechtigt. Einerseits ist die Annahme,

---

<sup>3</sup>Eine Analyse der Marktdynamik unter diesem Aspekt präsentieren zum Beispiel *Malliaris/Stein* (1999).

<sup>4</sup>*Haugen* (1998) liefert mit diesem Konzept eine „Lösung“ der „Seven Mysteries“.

<sup>5</sup>Weitere Beispiele sind *Beja/Goldman* (1980), *Chiarella* (1992), *Frankel/Froot* (1988), *Ghezzi* (1992), *Day/Huang* (1990), *De Grauwe et al.* (1992), *Sethi* (1996), *Franke/Sethi* (1993), *Lux* (1994, 1995), *Lux/Marchesi* (1998). *Kurz* (1997) präsentiert ein Gleichgewichtskonzept, das er „rational belief equilibrium“ nennt. Er führt heterogene Erwartungen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen ein, die eine endogene Unsicherheit implizieren. Modelle, die Algorithmen untersuchen, nach denen die Akteure aus der Historie lernen, sind zum Beispiel *Bray* (1982), *Marcet/Sargent* (1989) und *Routledge* (1999).

dass die Akteure die notwendigen Modellgleichungen kennen, realitätsfern, andererseits ist es den Akteuren auch bei Kenntnis der Modellstruktur meist nicht möglich, das REE zu berechnen.

Wir präsentieren in dieser Arbeit drei Ansätze, wo wir von dem traditionellen Konzept abweichen und modellieren, wie Akteure Erwartungen über künftige Preisentwicklungen bilden:

1. Das Konzept der konsistenten Erwartungen,
2. das Konzept der „Adaptive Belief Systeme“ und
3. künstliche Finanzmärkte, wo die Modellierung der Erwartungsbildung mittels „Classifier Systemen“ erfolgt.

Dabei verfolgen wir mit den Ansätzen 2 und 3 das Ziel, die Dynamik auf Kapitalmärkten zu verstehen, während das Konzept der konsistenten Erwartungen eine Alternative zum REE mit geringeren Anforderungen an die Rationalität der Akteure präsentiert.

Modelle mit *konsistenten Erwartungen* wurden von *Hommes/Sorger* (1998) eingeführt. Dabei werden Wirtschaftssubjekte so modelliert, dass sie ihre Vorhersagen zukünftiger Wirtschaftsdaten aufgrund einfacher ökonometrischer Modelle treffen und selbst nur über eine beschränkte Menge statistischer Methoden verfügen. Ein Gleichgewicht mit konsistenten Erwartungen ist eines, bei dem die tatsächliche Dynamik mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Methoden nicht von jener der Prognosemodelle unterschieden werden kann. Die in Hommes und Sorger (1998) dargestellte Formalisierung dieses Konzepts hat einen schwerwiegenden Nachteil: Die Konsistenzbedingung kann erst am Ende des Modellzeitraumes überprüft werden (dies ist normalerweise in der unendlich fernen Zukunft). Vor diesem Hintergrund übertragen wir die Modellierung konsistenter Erwartungen auf Finanzmärkte. Dabei bestimmen wir analytisch die Existenz eines Gleichgewichts und die Dynamik der Gleichgewichtspreise bei Autokorrelationslernen und untersuchen diese im Rahmen von Modellsimulationen. Wir präsentieren eine formale Definition eines derartigen Gleichgewichts sowie einfache Beispiele.

Der Ansatz der *Adaptive Belief Systeme* geht auf *Brock/Hommes* (1997a) zurück. Dabei adaptieren die Investoren ihre „Erwartungen“ („beliefs“, Prognoseverfahren) in jeder Periode, wobei sie aus einer endlichen Menge von Prädiktoren auswählen. Auf Grundlage einer Fitnessfunktion beziehungsweise eines Performancemaßes treffen die Akteure eine beschränkt rationale Auswahl zwischen den Prädiktoren. Dies führt zur sogenannten „Adaptive Rational Equilibrium Dynamics“, einer evolutionären nichtlinearen Dynamik zwischen Erwartungsbildungsmechanismen, welche mit der Dynamik der endogenen Variablen gekoppelt ist. Diese Modellklasse inkludiert traditionelle REE-Modelle (zum Beispiel Modelle, welche Versionen der EMH entsprechen). Allerdings sind rationale Erwartungsbildungen mit Kosten verbunden und stehen „in Konkurrenz“ mit anderen Prognoseverfahren bezüglich der erzielten Profite beziehungsweise Nutzenwerte. Die Modelle von *Brock/Hommes* (1997b, 1998, 1999) wurden in *Gaunersdorfer* (2000) dahingehend erweitert, dass nicht nur die „beliefs“ über künftige Preise, sondern auch jene über Volatilitäten in jeder Periode adaptiert werden. Als Performancemaß werden nicht

realisierte Profite sondern Nutzenwerte (risikoaverser Investoren) verwendet. Die daraus resultierende Marktdynamik wurde analytisch eingehend studiert. Wir untersuchen in dieser Arbeit, ob mit diesem Modell empirisch beobachtbare Phänomene am Aktienmarkt (im speziellen betrachten wir Eigenschaften von Häufigkeitsverteilungen von Renditen und Autokorrelationen von Renditen und quadrierten Renditen der mittels des Modells generierten Zeitreihen) erklärt werden können.

Das dritte Modell baut auf dem „künstlichen Santa Fe-Aktienmarkt“ von *Arthur et al.* (1997) und *LeBaron et al.* (1999) auf. Ausgehend von einem linearen Finanzmarktmodell (das auch bei den beiden zuvor beschriebenen Modellen Ausgangspunkt ist) wird der Marktmechanismus mit induktivem Lernen kombiniert. Mittels „Classifier Systemen“ versuchen die Investoren die relevanten Zustände der Ökonomie zu bestimmen und so auf Basis ihrer Informationen (wobei Teile der Informationen auch unberücksichtigt bleiben können), eine Vorhersage über künftige Preise und Dividenden zu treffen („condition-forecast classifier“). Im Rahmen dieses Ansatzes werden vorwiegend Simulationsstudien durchgeführt. Man startet mit einer Population von verschiedenen Handelsregeln (ähnlich den Prädiktoren bei den Adaptive Belief Systemen), diese Regeln stehen miteinander in Wettbewerb und replizieren sich entsprechend ihrer Fitness. Neue Regeln werden mittels eines genetischen Algorithmus durch Crossover und Mutationen produziert, während Regeln mit niedriger Performance eliminiert werden. Simulationen zeigen, dass mittels dieses künstlichen Aktienmarktes sowohl der Effekt der leptokurtischen Verteilung von Wertpapierrenditen als auch das Phänomen des Volatility Clustering nachgebildet werden kann.

Bei den Adaptive Belief Systemen und den künstlichen Finanzmärkten sind REE ein Spezialfall, wenn die Investoren homogene Erwartungen besitzen. Rationale Erwartungen sind also in diesen Modellen eingebettet und bilden eine Benchmark. Die Heterogenität der Erwartungen und die Abweichung von rationalen Erwartungen ergeben sich aus einer evolutionären Selektion in der Population möglicher Vorhersageregeln und sind daher endogen. Diese Modelle basieren auf einer adaptiven, zurückschauenden Erwartungsbildung über künftige Kurse, also auf Basis *historischer* Preise. In der Terminologie von *Haugen* (1998) können diese mittels eines Feedback-Systems generierten Preisveränderungen als „price-driven volatility“ interpretiert werden.

Diese beiden Ansätze sind in einem gewissen Sinn komplementär. Bei den künstlichen Märkten haben die Akteure eine weite Palette von Vorhersageregeln zur Verfügung. Die Interaktionen, die zu Regeln, welche dem Preistrend folgen, führen, sind endogen. Allerdings ist es bei Computersimulationen oft schwer, Kausalitäten innerhalb des Marktgeschehens zu erkennen und theoretische Rückschlüsse dieses künstlichen Marktes auf reale Märkte zu ziehen. Im Gegensatz zu den künstlichen Finanzmärkten sind bei den Adaptive Belief Systemen die verwendeten Regeln von Beginn an festgelegt. Sie bieten somit nur eingeschränkte Möglichkeiten, Handelsregeln als Reaktion auf Marktbedingungen zu wählen. Durch die relative Einfachheit des Modelles erlauben sie aber analytische Resultate abzuleiten und so einen besseren Einblick in die Marktmechanismen zu gewinnen.

Im nächsten Abschnitt präsentieren wir das Marktmodell, welches unseren Ansätzen zugrundeliegt und auf *Grossman/Stiglitz* (1980) aufbaut. In Abschnitt 3 werden die einzelnen Modelle

der Erwartungsbildung dargestellt. Für jedes Modell werden Simulationen durchgeführt und die Verteilungen und Autokorrelationsfunktionen der Renditen und quadrierten Renditen der mittels der Modelle generierten Zeitreihen untersucht. Diese Resultate werden in Abschnitt 4 diskutiert. In Abschnitt 5 fassen wir die Ergebnisse zusammen und geben einen Ausblick für Weiterentwicklungen der Modelle.

## 2 Das Basismodell

Wie bereits in der Einleitung dargelegt wurde, ist unsere Zielsetzung, auf der Basis eines allgemeinen Finanzmarktmodells unterschiedliche Erwartungsbildungsprozesse zu formulieren und deren Auswirkung auf die Preisdynamik zu untersuchen. Dabei wählen wir als Ausgangspunkt folgendes Standardmodell (siehe zum Beispiel *Grossman/Stiglitz*, 1980, oder *Brock/LeBaron*, 1996).

Jedem Investor  $i$  steht neben einer risikolosen Veranlagung seines Vermögens (Verzinsung mit dem konstanten risikolosen Zinssatz  $r$ ) eine risikobehaftete Investitionsalternative (Aktie) zur Verfügung.  $p_t$  bezeichnet den Preis (ex-Dividende) der risikobehafteten Anlageform zum Zeitpunkt  $t$  und  $d_t$  die Dividende, welche einem exogenen, stochastischen Prozeß folgt. In den meisten Fällen werden wir annehmen, daß die Dividenden einem identisch unabhängigen (iid) Prozeß genügen. Jeder Akteur ist mit dem Anfangsvermögen  $w_{i0}$ , ausgestattet, das für Investitionen in die beiden Anlageformen zur Verfügung steht. Unter der Annahme, daß Investor  $i$  zu Beginn von Periode  $t$   $q_{it}$  Einheiten der riskanten Anlageform zum Preis  $p_t$  in seinem Portefeuille hält, ergibt sich folgende Dynamik für die Entwicklung des (risikobehafteten) Vermögens

$$w_{i,t+1} = (1+r)(w_{it} - p_t q_{it}) + (p_{t+1} + d_{t+1})q_{it}. \quad (1)$$

Da sowohl die zukünftigen Dividenden als auch Preise des riskanten Wertpapiers zum Zeitpunkt der Anlage nicht exakt bekannt sind, müssen sich die Investoren Erwartungen darüber bilden und ihre Entscheidungen auf der Basis der Maximierung des erwarteten Nutzens des Endvermögens treffen.

Seien  $E_t$  und  $V_t$  die bedingte Erwartung und Varianz, basierend auf einer allgemein zugänglichen Informationsmenge historischer Preise und Dividenden,  $F_t = \{p_t, p_{t-1}, \dots, d_t, d_{t-1}, \dots\}$  ( $(F_t)$  ist zum Beispiel eine Filtration). Mit  $E_{it}$  und  $V_{it}$  bezeichnen wir die „Beliefs“ (Prognosen) von Investor  $i$  für diese bedingte Erwartung und Varianz. Der Prozess der Erwartungsbildung ist Gegenstand der verschiedenen Ansätze, die in den folgenden Abschnitten diskutiert werden.

Wir gehen von myopisch agierenden Investoren aus und unterstellen, daß sie ihre Nachfrageentscheidungen auf der Basis eines Mittelwert-Varianzansatzes bestimmen. Das heißt, jeder Investor bestimmt seine Nachfrage als Lösung des Optimierungsproblems

$$\max_{q_i} \left\{ E_{it}(w_{i,t+1}) - \frac{\zeta_i}{2} V_{it}(w_{i,t+1}) \right\} \quad \text{bzw.} \quad \max_{q_i} \left\{ E_{it}(R_{t+1})q_{it} - \frac{\zeta_i}{2} q_{it}^2 V_{it}(R_{t+1}) \right\}, \quad (2)$$

wobei  $R_{t+1} := p_{t+1} + d_{t+1} - (1+r)p_t$  als Überschussertrag des risikobehafteten Wertpapiers interpretiert werden kann,  $\zeta_i > 0$  charakterisiert den Grad der Risikoaversion von Investor  $i$ . Dies ergibt die Nachfragefunktion der Investoren

$$q_{it} = \frac{E_{it}(R_{t+1})}{\zeta_i V_{it}(R_{t+1})}. \quad (3)$$

Bei konstanter Anzahl  $Q$  an Aktien muß der Gleichgewichtspreis  $p_t$  die Marktträumungsbedingung

$$\sum_{i=1}^N q_{it} = Q \quad (4)$$

erfüllen.  $N$  ist die Zahl der Investoren am Markt.

Haben die Investoren gleichen Koeffizient der Risikoaversion  $\zeta_i \equiv \zeta$  und homogene Erwartungen und bilden sie ihre Erwartungen auf Grundlage der allgemein zugänglichen Information  $F_t$  (das heißt  $E_{it} = E_t$  und  $V_{it} = V_t$ ), so reduziert sich die Gleichgewichtsdynamik (4) auf

$$(1+r)p_t = E_t(p_{t+1} + d_{t+1}) - \zeta V_t(p_{t+1} + d_{t+1}) \frac{Q}{N}. \quad (5)$$

Mittels dieser Gleichung können wir die Notation einer „Fundamentallösung“ (REE) definieren. Eine explizite Lösung dieser Gleichung gibt es unter der speziellen Annahme, dass der Dividendenprozess identisch und unabhängig verteilt (iid) oder ein autoregressiver Prozess der Ordnung 1 mit iid Innovationen ist (das heißt  $d_{t+1} = a_1 + a_2 d_t + \varepsilon_t$ , wobei  $(\varepsilon_t)$  iid mit Erwartungswert  $E(\varepsilon_t) = 0$  und Varianz  $V(\varepsilon_t) < \infty$ ) und  $Q$  über die Zeit konstant ist. In diesem Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit das exogene Angebot an Aktien  $Q \equiv 0$  setzen. Die Nachfragemengen  $q_{it}$  sind dann als Nettogrößen zu interpretieren, das heißt als Anzahl der ins Portefeuille zusätzlich aufgenommenen (beziehungsweise abgestoßenen) Aktien.<sup>6</sup> Aus Gleichung (5) erhält man unter diesen Annahmen

$$(1+r)p_t = E\{p_{t+1} + d_{t+1} | F_t\} = E_t(p_{t+1} + d_{t+1}). \quad (6)$$

Diese Gleichung hat im allgemeinen unendlich viele Lösungen, aber im Standardfall  $r > 0$  erfüllt nur eine Lösung die sogenannte „No bubbles“-Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(p_t^*)}{(1+r)^t} = 0. \quad (7)$$

---

<sup>6</sup>Die für  $Q \equiv 0$  durchgeführte Variablentransformation impliziert eine entsprechende Variablenänderung auch für den Dividendenprozess (siehe Brock, 1997). Dadurch werden weder die Struktur des Modells noch unsere Resultate beeinflusst.



### 3 Alternative Erwartungsbildung und Finanzmarktgleichgewicht

#### 3.1 Konsistente Erwartungsgleichgewichte

Im folgenden wird das Konzept der *konsistenten Erwartungsgleichgewichte (CEE)* in Verbindung mit verschiedenen Lernverfahren auf das oben beschriebene Kapitalmarktmodell angewendet. In diesem Modell sind die Akteure bezüglich ihrer Erwartungsbildung homogen. Vom Paradigma der rationalen Erwartungen wird insofern abgewichen, als die Verteilung der Dividenden und das ökonomische Modell den Akteuren nicht bekannt sind. Von den Akteuren wird angenommen, dass sie unter Verwendung eines bestimmten linearen Prognosemodells (einer *Forecast-Rule*), keine systematischen Fehler machen, das heißt, die Aktionen der Akteure sind in diesem Sinn konsistent mit den jeweiligen Schätzmodellen. Diese Anforderungen führen uns zum Konzept der CEE.

Für den aktuellen gewünschten Bestand an Aktien aus Gleichung (3) benötigen die Akteure ihre bedingte Erwartung über den Überschussertrag des riskanten Wertpapiers  $E_{it}(R_{t+1}) = E_{it}(p_{t+1} + d_{t+1} - (1+r)p_t)$ . Um den gewünschten Bestand  $q_{it}$  zu bestimmen, werden Prognosen für den Preis und die Dividende der nächsten Periode benötigt. Da sich die Akteure bezüglich ihres Schätzverfahrens nicht unterscheiden, setzen wir  $E_{it}(p_{t+1} + d_{t+1}) = E_t(p_{t+1}) + E_t(d_{t+1})$ .<sup>7</sup> Die Beliefs über die bedingten Varianzen  $V_{it}(R_{t+1}) \equiv \sigma^2$  sind konstant und ebenfalls identisch für alle Akteure. Die periodischen Schätzer von  $\sigma^2$  bezeichnen wir mit  $\hat{\sigma}_t^2$ . Für die Vorhersage der Preise und Dividenden verwenden die Akteure die folgenden Prognosemodelle:

$$E_t(p_{t+1}) = \alpha_p + \beta(p_t - \alpha_p), \quad (8)$$

$$E_t(d_{t+1}) = \alpha_d. \quad (9)$$

Da den Akteuren in Periode  $t$  der Preis  $p_t$  noch nicht bekannt ist, können sie aus Gleichung (8) nicht den zukünftigen Preis des risikobehafteten Wertpapiers schätzen. Mittels (8) und des beobachteten Preises  $p_{t-1}$  können die Akteure eine Prognose für  $p_t$  und – durch rekursives Einsetzen in Gleichung (8) – die Prognose für den Preis der nächsten Periode  $E_t(p_{t+1}) = \alpha_p + \beta^2(p_{t-1} - \alpha_p)$  ermitteln. Setzt man die Nachfragefunktionen (3) in die Markträumungsbedingung (4) ein, so ergibt sich der Preis aus

$$p_t = \frac{1}{1+r} \left( E_t(p_{t+1}) + E_t(d_{t+1}) - \frac{Q\hat{\sigma}_t^2}{\sum_i 1/\zeta_i} \right). \quad (10)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass die Heterogenität der Akteure ausschließlich über deren Grad der Risikoaversion zum Ausdruck kommt.

<sup>7</sup>Mit  $E_t$  wird in diesem Abschnitt nicht der bedingte Erwartungswert  $E(\cdot|F_t)$  aus Abschnitt 2 bezeichnet, sondern die Prognose der Akteure.

Der Aktienpreis kann somit als eine Abbildung  $p_t = G(E_t(p_{t+1}), E_t(d_{t+1}), \hat{\sigma}_t^2)$  dargestellt werden. In den nächsten Schritten wird eine Abbildung  $p_t = F(p_{t-1}, \theta_t)$  abgeleitet, wobei  $\theta_t := (\alpha_{pt}, \alpha_{dt}, \beta_t, \hat{\sigma}_t^2)$  und  $\alpha_{pt}, \alpha_{dt}, \beta_t$  die periodischen Schätzer der Parameter  $\alpha_p, \alpha_d, \beta$  sind.  $F(p_{t-1}, \theta_t)$  wird im folgenden durch die Verknüpfung der Abbildung  $p_t = G(E_t(p_{t+1}), E_t(d_{t+1}), \hat{\sigma}_t^2)$  mit den Prognosemodellen (8) und (9) und der Schätzung der Varianz  $\hat{\sigma}_t^2$  abgeleitet. Die Varianz der Preise und Dividenden wird von den Akteuren unter der Annahme der Unabhängigkeit der Störterme durch die folgenden Gleichungen geschätzt,

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{pt}^2 + \hat{\sigma}_{dt}^2, \quad (11)$$

wobei

$$\hat{\sigma}_{pt}^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} (p_j - \bar{p}_t)^2 \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_{dt}^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} (d_j - \bar{d}_t)^2, \quad (12)$$

die Stichprobenmittelwerte  $\bar{p}_t$  und  $\bar{d}_t$  ergeben sich aus

$$\bar{p}_t = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} p_j \quad \text{und} \quad \bar{d}_t = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} d_j. \quad (13)$$

Die Schätzung der Parameter  $\alpha_p, \alpha_d$  und  $\beta$  kann dabei mittels der Methode der kleinsten Quadrate (LS-Lernen), durch „Sample Autocorrelation“-Lernen (SAC-Lernen) oder auch – wie in Abschnitt 3.3 – durch genetische Algorithmen durchgeführt werden. Bei der Methode der kleinsten Quadrate werden in jeder Periode die Parameter  $\alpha_{pt}, \alpha_{dt}$  und  $\beta_t$  derart gewählt, dass die Summen der quadrierten Residuen  $\sum_{j=0}^{t-1} (p_j - E_t(p_j))^2$  und  $\sum_{j=0}^{t-1} (d_j - E_t(d_j))^2$  minimiert werden. Bei Sample Autocorrelation-Lernen ergeben sich die Parameter aus den Mittelwerten der Preise und der Dividenden und des Autokorrelationskoeffizienten der Preise  $\gamma_j$  der Ordnung  $j = 1$ , welcher wie folgt definiert ist,

$$\gamma_{jt} = \frac{\text{Cov}(p_t, p_{t-j})}{\hat{\sigma}_{pt} \hat{\sigma}_{p,t-1}}. \quad (14)$$

Die Parameter sind somit durch  $\alpha_{pt} = \bar{p}_t, \alpha_{dt} = \bar{d}_t$  und  $\beta_t = \gamma_{1t}$  gegeben. Sind nun das Schätzmodell und der Algorithmus zur Bestimmung der Parameter – wie in unserem Fall durch (8), (9) und LS- bzw. SAC-Lernen – festgelegt, so erhält man aus diesen Größen und Gleichung (10) das Bewegungsgesetz  $F(p_{t-1}, \theta_t)$  des Kapitalmarktmodells

$$p_t = \frac{1}{1+r} \left( \alpha_{pt} + \alpha_{dt} + \beta_t^2 (p_{t-1} - \alpha_{pt}) - \frac{Q \hat{\sigma}_t^2}{\sum_i 1/\zeta_i} \right) =: F(p_{t-1}, \theta_t). \quad (15)$$

Folgt der Dividendenprozess ( $d_t$ ) einem unabhängig identisch verteilten Prozess mit Erwartungswert  $E(d_t) = \mu_d$  und Varianz  $V(d_t) = \sigma_d^2$ , so konvergieren  $\alpha_{dt}$  und  $\hat{\sigma}_{dt}^2$  gegen  $\alpha_d = \mu_d$  und  $\hat{\sigma}_d^2 = \sigma_d^2$ , falls diese Parameter wie oben beschrieben geschätzt werden. Unter diesen Voraussetzungen erscheint es durchaus plausibel, ein konsistentes Erwartungsgleichgewicht wie folgt zu definieren (siehe *Hommel/Sorger, 1998*):

**Konsistentes Erwartungsgleichgewicht (CEE):** *Unter einem CEE versteht man ein Tripel  $\{(p_t)_{t=0}^\infty; \alpha, \beta\}$ , wobei  $\alpha := (\alpha_p \ \alpha_d)' \in \mathbb{R}^2$  und  $\beta \in [-1, 1]$  Parameter in dem von den Akteuren verwendeten AR(1)-Prognosemodell sind, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Die Preise  $p_t$  folgen dem in Gleichung (15) definierten Bewegungsgesetz  $F$ .*
2. *Die asymptotischen Mittelwerte der Preise und der Dividenden  $\bar{p}$  und  $\bar{d}$  entsprechen  $\alpha_p$  und  $\alpha_d$ .*
3. *Die asymptotischen Autokorrelationskoeffizienten der Preise  $\gamma_j$  genügen den folgenden Bedingungen: Wenn  $(p_t)_{t=0}^\infty$  konvergiert, dann ist  $\text{sgn } \gamma_j = \text{sgn } \beta^j$ , für Lags  $j \geq 1$ ; wenn  $(p_t)_{t=0}^\infty$  divergiert, dann ist  $\gamma_j = \beta^j$  für  $j \geq 1$ .*

Bei diesem Gleichgewichtskonzept verlangen wir daher nur, dass die Preise dem Bewegungsgesetz des Systems folgen (Punkt 1), dass die auf die mittleren Dividenden und Preise bezogenen Koeffizienten  $\alpha_d$  und  $\alpha_p$  gleich den Mittelwerten der Dividenden und Preise sind (Punkt 2) und dass die Vorzeichen der Autokorrelationskoeffizienten der Preise  $\gamma_j$  den Vorzeichen des Parameters  $\beta^j$  entsprechen (Punkt 3). Für den konvergenten Fall begnügen wir uns somit mit einer Übereinstimmung der Vorzeichen, für divergente Preise verlangen wir  $\beta^j = \gamma^j$ . Die schwächere Annahme für den konvergenten Fall resultiert aus der Indeterminiertheit von  $\beta$ , wenn  $p_t$  gegen eine Konstante konvergiert.

Die asymptotischen Mittelwerte und Autokorrelationskoeffizienten erhält man durch Bildung der Grenzwerte,  $\bar{p} := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_t$ , und so weiter. Eine Konvergenz der Parameter, und somit des Vektors  $\theta_t$  führt – wie in der obigen Definition gefordert – unter der Annahme des unabhängig identisch verteilten Dividendenprozesses im konsistenten Erwartungsgleichgewicht zu dem deterministischen dynamischen System  $p_t = F(p_{t-1}, \theta)$ , wobei  $\theta := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t$ .

Wie aus der obigen Definition hervorgeht, werden beim CEE-Konzept deutlich geringere Ansprüche an die den Akteuren zur Verfügung stehenden Informationen (stochastische Eigenschaften der Modellgrößen) und an die analytischen Fähigkeiten der Akteure als bei rationalen Erwartungsgleichgewichten gestellt. Die Akteure verhalten sich wie Ökonometriker und machen basierend auf dem aktuellen Informationsstand keine systematischen Fehler. Im konsistenten Erwartungsgleichgewicht erfüllen die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  die in der obigen Definition beschriebenen Anforderungen. Ermittelt man einen Fixpunkt für Gleichung (10), so muß  $\hat{\sigma}^2$  gegen  $\sigma_d^2$  streben, da der Schätzer der Preisvarianz  $\hat{\sigma}_p^2$  im Steady-State (Fixpunkt) gegen null und der Schätzer der Dividendenvarianz  $\hat{\sigma}_d^2$  gegen  $\sigma_d^2$  strebt. Somit gelangt man zu folgendem Steady-State Gleichgewicht (*Steady-State CEE*):

$$p^* = \frac{1}{r} \left( \alpha_d - \frac{Q\sigma_d^2}{\sum_i 1/\zeta_i} \right) = \frac{1}{r} \left( \mu_d - \frac{Q\sigma_d^2}{\sum_i 1/\zeta_i} \right). \quad (16)$$

Dieses CEE ist stabil und eindeutig unter den obigen Voraussetzungen (siehe *Sögner/Mitlöhner, 1999*). Weiters entspricht in diesem Fall der Gleichgewichtspreis einer ewigen Rente von

Sicherheitsäquivalenten, wobei das CEE mit eindeutigen rationalen Erwartungsgleichgewicht übereinstimmt. Dieses Ergebnis bedeutet, daß das rationale Erwartungsgleichgewicht unter viel geringeren Informationsvoraussetzungen als im REE-Modell erreicht werden kann.

Ob nun das CEE bzw. REE erreicht werden kann, hängt aber letztendlich von der Frage der Konvergenz der Parameter  $\alpha_{pt}$ ,  $\alpha_{dt}$ ,  $\beta_t$  und  $\hat{\sigma}_t^2$  ab. Konvergieren diese, so heißen die Parameter des Systems *erlernbar unter einem gegebenen Lernalgorithmus*. Das periodenweise Berechnen der Parameter  $\alpha_{pt}$ ,  $\alpha_{dt}$ ,  $\beta_t$  und  $\sigma_t^2$  bezeichnen man als *lernen*. Hierbei ist zu beachten, daß ein gewisser Algorithmus, welcher in diesem Zusammenhang oft als *Lernregel* bezeichnet wird, angenommen werden muß, um die Frage des Lernens zu diskutieren. Zur Bestimmung der Prognoseparameter werden in dieser Arbeit

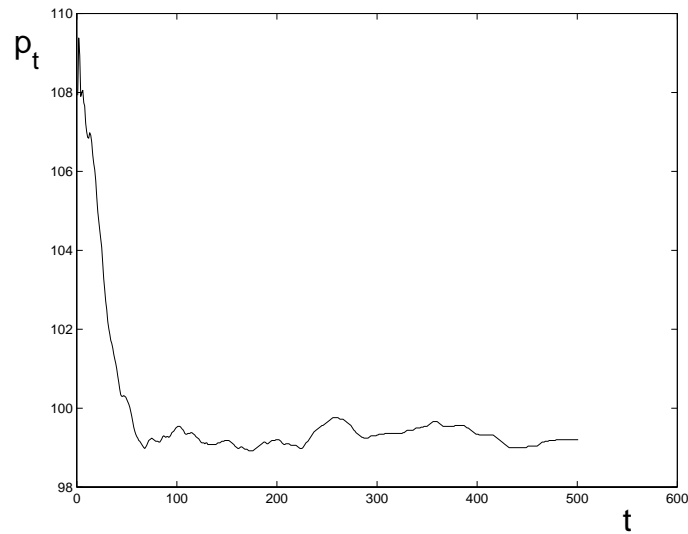
- Sample Autocorrelation-Lernen (SAC) und
- Kleinstes Quadrate-Lernen (LS)

verwendet. Simulationsläufe zeigen, dass die Preise nicht für alle Parameterwerte gegen das REE konvergieren. Eine analytische Diskussion dieses Konvergenzproblems wird in *Pötzelberger/Sögner (1999)* für SAC-Lernen vorgenommen. Die statistischen Eigenschaften der mit diesen Verfahren generierten Zeitreihen werden in Abschnitt 4 präsentiert. Die Parameter in den Simulationsläufen wurden folgendermaßen spezifiziert. Der risikolose Zinssatz  $r$  wird mit 10% festgelegt, das Aktienangebot wird mit  $Q = 1$  normiert, die Anzahl der Akteure beträgt  $N = 10$ . Die Parameter der Risikoaversion  $\zeta_i$  werden aus dem Intervall  $[-0.3, -0.1]$  gezogen. Der Dividendenprozess  $(d_t)$  wird als  $N(10, 1)$ -verteilter iid-Prozess angenommen. Als illustrative Veranschaulichung des Lernprozesses zeigt *Abbildung 1* einen mit SAC-Lernen erzeugten Preispfad.

## 3.2 Adaptive Belief Systeme

*Brock/Hommes (1997a)* haben, um heterogene Erwartungsbildungen zu untersuchen, das Konzept der *Adaptive Belief Systeme* eingeführt. In solchen Systemen adaptieren die Akteure ihre Vorhersagen über künftige Preise in jeder Periode, indem sie aus einer endlichen Menge von Vorhersagefunktionen (Prädiktoren) auswählen. Diese Prädiktoren werden mittels eines allgemein akzeptierten Performancemaßes (Fitnessfunktion), welches eine Funktion der bis zu diesem Zeitpunkt gesammelten Information ist, bewertet. Auf dieser Grundlage treffen die Akteure eine beschränkt rationale Auswahl zwischen den Prädiktoren. Dies führt zur sogenannten *Adaptive Rational Equilibrium Dynamics (ARED)*, einer evolutionären (nichtlinearen) Dynamik zwischen Erwartungsbildungen (Wahl der Prädiktoren), welche mit der Dynamik der endogenen Modellvariablen gekoppelt ist. *Brock/Hommes* zeigen, dass die ARED einen allgemeinen Mechanismus inkludiert, welcher zu lokalen Instabilitäten des Gleichgewichtspreises und zu komplexer globaler Gleichgewichtsdynamik führt.

Abbildung 1: Preiszeitreihe mit SAC-Lernen



*Brock/Hommes* (1997b, 1998, 1999) wenden dieses Konzept auf ein einfaches Asset Pricing Modell (siehe Abschnitt 2) an. Haben die Investoren rationale homogene Erwartungen und folgen die Dividenden einem identisch unabhängig verteilten (iid) Prozess, so sind die Preise über den Zeitablauf konstant. Bei heterogenen Preiserwartungen (Preisprognosen) kann es jedoch zu unregelmäßigen Preisfluktuationen kommen, welche durch unterschiedlich lange Perioden, wo sich die Preise nahe dem „Fundamentalwert“ der Aktien befinden, Perioden des „Optimismus“, wo die Preise stark steigen und „pessimistischen“ Perioden, wo es zu einem starken Preisverfall kommt, charakterisiert sind. Dieser unregelmäßige Preisverlauf wird durch eine beschränkt rationale Wahl der Prädiktoren hervorgerufen, *Brock/Hommes* nennen dies „the market is driven by rational animal spirits“. Das Modell inkludiert das klassische Modell rationaler Erwartungen (zum Beispiel eine Modellklasse, welche Versionen der EMH entspricht), allerdings sind diese rationalen Erwartungen mit Kosten verbunden und stehen bezüglich ihrer Performance im Lauf der Zeit „im Wettbewerb“ mit anderen Vorhersageregeln.

Im folgenden wird das Modell kurz beschrieben (siehe auch *Brock*, 1997). Wir gehen von dem in Abschnitt 2 beschriebenen Kapitalmarktmodell aus, wobei alle Investoren den gleichen Koeffizient der Risikoaversion  $\zeta_i \equiv \zeta$  haben, und treffen folgende Annahmen:

- A1. Die Investoren haben homogene „Beliefs“ bezüglich der bedingten Varianzen  $V_{it}(p_{t+1} + d_{t+1}) = V_t(p_{t+1} + d_{t+1})$ ,  $\forall i, t$ . Diese Annahme lässt sich auf Grund einer Arbeit von *Nelson* (1992) rechtfertigen. *Nelson* hat gezeigt, dass (speziell für high-frequency Daten) bedingte Varianzen wesentlich leichter zu schätzen sind als bedingte Erwartungswerte.
- A2.  $E_{it}(d_{t+1}) = E_t(d_{t+1})$ ,  $\forall i, t$  (folgt  $d_t$  zum Beispiel einen AR(1)-Prozess wie in Abschnitt

2 beschrieben, so ist  $E_t(d_{t+1}) = a_1 + a_2 d_t$ , das heißt, die Investoren haben homogene Erwartungen bezüglich der Dividenden der jeweils nächsten Periode.

- A3. Alle Beliefs bezüglich künftiger Preise sind von der Form  $E_{it}(p_{t+1}) = E_t(p_{t+1}^*) + f_i(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ ,  $\forall i, t$ , wobei  $E_t = E(\cdot | F_t)$  und  $x_t = p_t - p_t^*$  die Abweichung des Preises vom Fundamentalwert („Fundamentallösung“  $p_t^*$ , vgl. Abschnitt 2, Gleichungen (6) und (7)) bezeichnet. Diese Annahme beschränkt die Beliefs  $E_{it}(p_{t+1})$  auf zeitstationäre Funktionen von Preisabweichungen von einem allgemein akzeptierten Fundamentalwert.

Aus A2 und A3 folgt  $E_{it}(p_{t+1} + d_{t+1}) = E_t(p_{t+1}^*) + E_t(d_{t+1}) + f_{it}$ , wobei  $f_{it} := f_i(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ . Für den Überschussertrag  $R_{t+1}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= p_{t+1} + d_{t+1} - R p_t \\ &= x_{t+1} + p_{t+1}^* + d_{t+1} - R x_t - R p_t^* \\ &= x_{t+1} - R x_t + \delta_{t+1}, \end{aligned} \quad (17)$$

wobei  $R = 1 + r$  und  $\delta_{t+1}$  eine Folge von Martingaldifferenzen bezüglich  $F_t$  ist, das heißt  $E_t(\delta_{t+1}) = 0 \forall t$ . Weiters nehmen wir an, dass  $\text{Cov}(x_{t+1} - R x_t, \delta_{t+1}) \equiv 0$  und dass  $V_{it}(\delta_{t+1}) =: \sigma_\delta$  konstant ist. Somit erhält man für die Beliefs über die bedingten Varianzen der Überschusserträge  $V_t(R_{t+1}) = V_t(x_{t+1} - R x_t) + \sigma_\delta^2$ . (17) kann als Zerlegung der Überschusserträge in einen „REE“-Term (Martingaldifferenz  $\delta_t$ ) und einen „endogenen dynamischen“ Term („endogene Unsicherheit“, <sup>8</sup> welche durch das Modell hinzukommt), betrachtet werden. Wir konzentrieren uns auf das deterministische „Skelett“ mit  $\delta_t \equiv 0$  und konstante Dividenden  $d_t \equiv \bar{d}$ .

Mittels Annahmen A1–A3 erhält man aus (4) für die Gleichgewichtsdynamik der Preisabweichungen vom Fundamentalwert die Beziehung

$$R x_t = \sum_{i=1}^K n_{it} f_{it}, \quad (18)$$

wobei zum Zeitpunkt  $t$  jeweils ein Anteil von  $n_{it}$  Investoren die gleiche Vorhersagefunktion  $f_i$  verwendet (in Gleichung (4) ist daher  $q_{it}$  im Fall  $Q = 0$  durch  $n_{it} q_{it}$  zu ersetzen, summiert wird nicht über die einzelnen Investoren, sondern über die  $K$  verschiedenen Investorentypen). Das heißt, aufgrund der getroffenen Annahmen A1–A3 lassen sich die Gleichgewichtspreise mittels eines *deterministischen dynamischen Systems* beschreiben.<sup>9</sup>

Die Anteile der verschiedenen Investorentypen (beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Investor einen bestimmten Prädiktor  $i$  wählt) werden mittels eines Discrete Choice Modells (siehe zum Beispiel *Manski/McFadden*, 1990), speziell durch sogenannte „Gibbs“-Wahrscheinlichkeiten, bestimmt,

$$\begin{aligned} n_{it} &= \text{Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt } t \text{ Prädiktor } i \text{ gewählt wird} \\ &= \exp(\beta U_{i,t-1}) / Z_t, \\ Z_t &= \sum_i \exp(\beta U_{i,t-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

<sup>8</sup>Vgl. auch *Kurz* (1997), welcher eine Theorie der „rationalen Belief-Gleichgewichte“ entwickelt.

<sup>9</sup>Formuliert man die Gleichgewichtsdynamik in dem Raum der Preisabweichungen vom Fundamentalwert, so könnte man auch allgemeinere Dividendenprozesse, auch nichtstationäre, zulassen.

wobei  $U_{it}$  eine „Fitnessfunktion“ oder ein „Performancemaß“ ist.  $1/\beta$  kann als Grad der Unbestimmtheit des Systems interpretiert werden, der Parameter  $\beta$  wird „Intensity of Choice“ genannt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prädiktor mit der höchsten Fitness gewählt wird, wächst mit steigendem  $\beta$ .  $\beta$  ist ein Maß dafür, wie sensibel die Investoren auf Unterschiede in der Fitness der Prädiktoren reagieren und somit in einem gewissen Sinn ein Maß für die Rationalität der Investoren. Im Fall  $\beta = 0$  wählen die Investoren die Prädiktoren zufällig (und unabhängig von ihrer Fitness) mit der Wahrscheinlichkeit  $1/K$  aus. Im Fall  $\beta = \infty$  agieren die Akteure perfekt rational und alle Investoren wählen in jeder Periode den Prädiktor mit der höchsten Fitness. Für endliches positives  $\beta$  sind die Akteure beschränkt rational in dem Sinn, dass die Prädiktoren anteilmäßig entsprechend ihrer Fitness angewendet werden. In der hier dargestellten Form ist diese Intensity of Choice eine exogen vorgegebene Konstante. Die Arbeiten von *Brock/Hommes* (1997a,b, 1998, 1999) und *Gaunersdorfer* (2000) zeigen, dass dieser Parameter in dem System eine entscheidende Rolle auf dem „Weg zum Chaos“ spielt. In einer Weiterentwicklung des Modells wird diese Größe in *Dangl/Gaunersdorfer* (1999) endogenisiert.

Um eine Fitnessfunktion zu definieren, benötigen wir ein Maß, welches die Performance der Vorhersagefunktion  $f_{it}$  bewertet. Wir bezeichnen mit

$$\rho_t := E_t(R_{t+1}) = E_t(x_{t+1}) - Rx_t = x_{t+1} - Rx_t$$

rationale Erwartungen bezüglich des Überschussertrags (Annahmen A1–A3 implizieren, dass  $x_{t+1}$  eine deterministische Funktion von  $(x_t, x_{t-1}, \dots)$  ist, sodass  $E_t(x_{t+1}) = x_{t+1}$ ) und mit

$$\rho_{it} := E_{it}(R_{t+1}) = E_{it}(x_{t+1}) - Rx_t = f_{it} - x_{t+1} + \rho_t$$

die Beliefs von Typ  $i$ . Weiters definieren wir risikoangepaßte Profite (Nutzenwerte) für Typ  $i$

$$\pi_{it} := \pi(\rho_t, \rho_{it}) := \rho_t q(\rho_{it}) - \frac{\zeta}{2} q(\rho_{it})^2 V_t(R_{t+1}), \quad (20)$$

wobei die Nachfrage nach Aktien

$$q(\rho_{it}) = \frac{\rho_{it}}{\zeta V_t(R_{t+1})}$$

die Lösung des Maximierungsproblems  $\max_q \pi_{it}$  ist, welches (2) entspricht. Nutzenwerte für rationale Erwartungen  $\pi_t = \pi(\rho_t, \rho_t)$  werden analog definiert. Die Fitnessfunktion definieren wir als exponentiell gewichtetes Mittel der vergangenen Nutzenwerte beziehungsweise der Differenzen der Nutzenwerte der Prädiktoren vom Typ  $i$  und jener rationaler Erwartungen (die Anteile verändern sich nicht, wenn man von jedem Exponenten in (19) dieselbe Konstante subtrahiert). Somit erhalten wir als Maß für die Performance der Vorhersagefunktion  $i$  für Periode  $t$ <sup>10</sup>

$$U_{it} = d\pi(\rho_{t-1}, \rho_{i,t-1}) + \eta U_{i,t-1}, \quad (21)$$

<sup>10</sup>*Brock/Hommes* (1997b, 1998, 1999) verwenden Nettoprofiten ohne Risikoanpassung für das Performancemaß. In diesem Fall erhält man  $U_{it} = \frac{1}{\zeta \sigma^2} (x_t - Rx_{t-1})(f_{i,t-1} - Rx_{t-1})$ .

wobei

$$d\pi(\rho_{t-1}, \rho_{i,t-1}) = \pi_{i,t-1} - \pi_{t-1} = -\frac{1}{2\zeta(V_{t-1}(R_t) + \sigma_\delta^2)}(x_t - f_{i,t-1})^2.$$

Der Parameter  $\eta$  bestimmt, inwieweit die Profite vergangener Perioden berücksichtigt werden und repräsentiert somit die „Gedächtnisstärke“ des Systems. Die Anteile der einzelnen Typen werden also im Fall, dass das Performancemaß mittels risikoangepasster Profite definiert wird, durch die quadrierten Vorhersagefehler bestimmt.

Wir möchten an dieser Stelle auf das Timing der Erwartungsbildung hinweisen. Bei der Bestimmung der Anteile werden in jeder Periode die zuletzt beobachteten Preise und Erträge herangezogen. Die Investoren nehmen in Periode  $t$  Positionen ein, die auf Vorhersagen für Periode  $t + 1$  basieren. Welche Vorhersageregeln sie anwenden, hängt von der Performance der Prädiktoren in Periode  $t - 1$ ,  $U_{i,t-1}$ , ab. Das heißt, am Ende von Periode  $t - 1$  ( $\hat{=}$  Beginn von Periode  $t$ ), nachdem der Preis  $p_{t-1}$  ( $x_{t-1}$ ) beobachtet wurde, werden die Anteile  $n_{it}$  und die Vorhersagen  $\rho_{i,t-1} = E_{i,t-1}(R_t)$  und  $V_{t-1}(R_t)$  gebildet.  $f_{i,t-1}$  und  $V_{t-1}(R_t)$  hängen von  $x_{t-2}, x_{t-3}, \dots$  ab. In Periode  $t$  wird dann der Preis  $p_t$  ( $x_t$ ) gebildet, welcher  $\rho_{t-1}$  definiert und so weiter.

### 3.2.1 Ein einfaches Beispiel

*Brock/Hommes* (1997b, 1998) und *Gaunersdorfer* (2000) haben dieses Kapitalmarktmodell für einige einfache Fälle (2–4 verschiedene Investorentypen) untersucht. Sie unterstellen, dass der Dividendenpross ( $d_t$ ) iid mit bedingten Erwartungen  $E_t(d_{t+1}) \equiv \bar{d}$  ist, der Fundamentalwert ist somit ebenfalls konstant,  $p_t^* \equiv \bar{p} = \bar{d}/r$ . Als Prädiktoren werden lineare Vorhersagefunktionen der Form  $f_{it} = g_i x_{t-1} + b_i$  verwendet. Akteure, welche die Regel  $f_{it} \equiv 0$  für ihre Vorhersagen verwenden, werden als Fundamentalisten – Investoren, die glauben, dass sich der Preis zu seinem Fundamentalwert bewegen wird – bezeichnet. Fundamentalisten besitzen in ihrer Informationsmenge alle vergangenen Preise und Dividenden, kennen jedoch nicht die Anteile der einzelnen Investorentypen im Markt. Sie agieren so, als ob alle anderen Investoren ebenfalls Fundamentalisten wären und sind daher nicht perfekt rational. Die Kosten, um eine Regel, die den Fundamentalwert vorhersagt, anwenden zu können, werden meist als positiv angenommen, da es mit einigen Anstrengungen verbunden ist, um zu verstehen, wie ein Markt funktioniert und um davon überzeugt zu sein, dass sich der Preis zum Fundamentalwert bewegt.

*Brock/Hommes* (1999) betrachten ein Beispiel, wo die Akteure nicht nur die Profite der letzten Periode, sondern die kumulierten Profite aus vergangenen Perioden in Betracht ziehen, das heißt, sie haben ein „längeres Gedächtnis“. Weiters präsentieren sie ein Beispiel für sogenannte „Large Type Limits“ (LTL), eine deterministische „Approximation“ eines Marktes mit vielen verschiedenen Handelsstrategien. Die Beliefs sind eine Stichprobe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.<sup>11</sup>

In all diesen Fällen ergibt sich eine ähnliche „Route zum Chaos“. Wenn die Intensity of Choice  $\beta$  hinreichend groß ist, erhält man unter bestimmten Parameterkonstellationen eine chaotische

<sup>11</sup>Diese LTL-Modelle könnten als „Brücke“ zwischen analytischen Resultaten der Adaptive Belief Systeme und der künstlichen Aktienmärkte, wie sie im Abschnitt 3.3 präsentiert werden, betrachtet werden.



Preisdynamik. Wir präsentieren einige Ergebnisse des Modells, wie es in *Gaunersdorfer* (2000) analysiert wird, und untersuchen die generierten Zeitreihen auf sogenannte „Stylized Facts“ (siehe Abschnitt 4).

Wir gehen von zwei Investorentypen, Fundamentalisten ( $f_{1t} \equiv 0$ ) und „Trend Chasern“ mit der Vorhersagefunktion  $f_{2t} = gx_{t-1}$  ( $g > 0$ ) aus. In den Fitnessfunktionen berücksichtigen wir nur die Profite der jeweils letzten Periode, das heißt, wir setzen  $\eta = 0$  in (21). Als Performancemaß der Fundamentalisten in Gleichung (19) wählen wir  $\tilde{U}_{1t} = U_{1t} - C + \alpha x_t^2$ , das Performancemaß der „Trend Chasern“ ist durch  $\tilde{U}_{2t} = U_{2t}$  gegeben. In der Fitnessfunktion der Fundamentalisten bezeichnet  $C$  die Kosten, die zum Erwerb des Fundamentalprädiktors aufgewendet werden müssen und  $\alpha$  eine exogene „stabilisierende Kraft“, welche den Preis zum Fundamentalwert zurücktreiben soll, wenn sich dieser zu weit davon entfernt hat. Der Grund, warum diese exogene Kraft eingeführt wird, ist folgende. Da in dem Markt nur zwei verschiedene Typen von Anlegern agieren und der Fundamentalprädiktor mit Kosten verbunden ist, wird die Preisdynamik leicht von den „Trend Chasern“ dominiert, was dazu führt, dass die Preise ohne Beschränkung exponentiell wachsen. Durch Einführen dieses Parameters bekommen die Fundamentalisten höheres Gewicht, wenn sich die Preise weiter vom Fundamentalwert wegbewegen. Die Gleichgewichtsdynamik bleibt beschränkt, wenn  $\alpha$  hinreichend groß gewählt ist. Falls sich der Preis zu weit vom Fundamentalwert wegbewegt, ist es denkbar, dass Investoren, welche technische Handelsstrategien anwenden, nicht daran glauben, dass ein Preistrend, der eine gewisse Zeit am Markt zu beobachten war (der „Trend Chasing“-Prädiktor hat dann eine höhere Performance), noch weiter anhalten wird. Das heißt, die Anteile der Investorentypen werden nicht nur von der Performance der Prädiktoren in der Vergangenheit bestimmt, sondern auch durch die Bedingungen am Markt (vgl. auch *Arthur et al.* (1997) bei der Wahl ihrer condition/forecast rules, siehe auch Abschnitt 3.3). Die Art, wie diese exogene Kraft hier eingeführt ist, ist ähnlich jener, wie *De Grauwe et al.* (1993) Gewichte für Chartisten einführen. Eine Endogenisierung so einer stabilisierenden Kraft soll in einer weiteren Entwicklung des Modells erfolgen. Möglichkeiten wären das Einführen mehrerer Investorentypen und eine Endogenisierung von  $\beta$ .

Die Schätzungen (Beliefs) der bedingten Varianzen  $\sigma_t := V_{t-1}(R_t)$  werden als exponentiell gewichtete Mittelwerte der quadratischen Abweichungen von den durchschnittlichen Überschusserträgen bestimmt,

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= w_\sigma \sigma_{t-1}^2 + (1 - w_\sigma)(x_{t-2} - Rx_{t-3} - \mu_{t-1})^2 \\ \mu_t &= w_\mu \mu_{t-1} + (1 - w_\mu)(x_{t-2} - Rx_{t-3}),\end{aligned}$$

wobei  $\mu_t$  die exponentiell gewichteten Mittelwerte der Überschusserträge sind und  $w_\sigma, w_\mu \in [0, 1]$ .

Das daraus resultierende dynamische System wird in *Gaunersdorfer* (2000) im Detail beschrieben und analysiert. Für gewisse Parameterwerte ergibt sich eine chaotische Preisdynamik, welche von einem unregelmäßigen Wechsel zwischen Perioden, wo Preise nahe dem Fundamentalwert sind und solchen, wo sie viel höher (oder niedriger) sind, charakterisiert ist. Dies gibt einen Einblick in den dem System zugrundeliegenden ökonomischen Mechanismus. Sind Preise nahe dem Fundamentalwert, liefern beide Prädiktoren gute Vorhersagen. Da aber der

Fundamentalprädiktor etwas kostet, wählen die meisten Investoren den Trend Chasing-Prädiktor. Preise werden sich daher vom Fundamentalwert wegbewegen. Sind die Preisabweichungen vom Fundamentalwert aber zu hoch, bewirkt die stabilisierende Kraft  $\alpha$  eine Rückkehr zu diesem.

Das hier betrachtete einfache Beispiel mit nur zwei Investorentypen (Fundamentalisten versus „optimistische“ Trend-Chaser mit Trend  $g > 1$ ) eignet sich gut, um die Preisdynamik analytisch zu untersuchen. *Abbildung 2* zeigt einige Beispiele für Kurszeitreihen, die mit diesem Modell generiert wurden. Diese weisen jedoch meist nicht die gewünschten statistischen Eigenschaften von realen Kursverläufen auf (siehe Abschnitt 4). Wenn die Preise zu sehr vom Fundamentalwert abweichen, bewirkt die stabilisierende Kraft  $\alpha$ , dass viele Investoren zum Fundamentalprädiktor wechseln, was zu einer abrupten Preisänderung in Richtung des Fundamentalwerts führt. Ein weiteres Charakteristikum des hier diskutierten Beispiels ist es, dass die Preisabweichungen vom Fundamentalwert  $x_t$  immer dasselbe Vorzeichen haben (das heißt, liegen die Preise zu einem Zeitpunkt über den Fundamentalwert, so können sie nie kleiner als der Fundamentalwert werden, vgl. *Abbildungen 2(a), (b)*), außer man addiert zu den Preisabweichungen in jeder Periode einen stochastischen Term (*Abbildung 2(d)*). Um also Zeitreihen zu erhalten, die realen Verläufen ähnlicher sind, ist es notwendig, mehr Typen von Akteuren zuzulassen<sup>12</sup> oder Prädiktoren mit Hilfe von vergangenen Preisänderungen zu formulieren (siehe *Gaunersdorfer/Hommes, 2000*).

### 3.3 Erwartungsbildung mittels Classifier Systemen

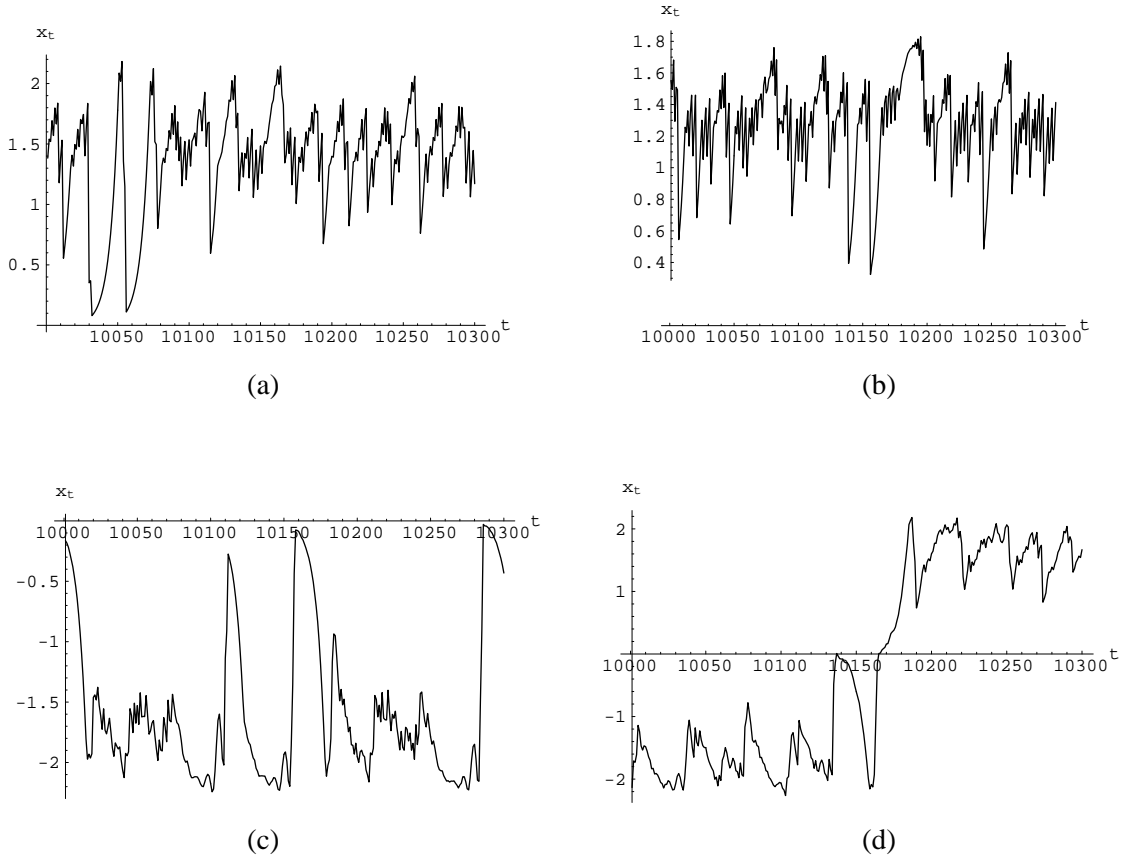
Das in diesem Abschnitt beschriebene Modell baut auf dem künstlichen Finanzmarkt von *Arthur et al. (1997)* und *LeBaron et al. (1999)* („Santa Fe-Finanzmarkt“) auf. Wie in den beiden zuvor beschriebenen Ansätzen gehen wir auch hier von dem in Abschnitt 2 präsentierten Kapitalmarktmodell aus. Die Erwartungsbildung über zukünftige Wertpapierpreise erfolgt mittels eines Classifier Systems in Anlehnung an die „condition-forecast“ Classifier von *Holland (1975)* und *Holland et al. (1986)*, das heißt mittels konkurrierender Regeln, welche unterschiedliche Prognosen liefern (wir gehen von 100 solcher Regeln aus). Jede Regel besteht aus einem Bedingungsteil, einem Prognoseteil und einem Teil, der die „Fitness“ der Regel angibt, welche die Genauigkeit der Vorhersagen der Regel mißt. Die Akteure verwenden für ihre Prognosen die Regel mit der zum jeweiligen Zeitpunkt höchsten Fitness, welche den Bedingungsteil erfüllt.

Der Bedingungsteil gibt an, wie der Zustand des Aktienmarktes, welcher über gewisse Aussagen definiert ist, sein muss, damit eine bestimmte Regel aktiviert wird. Dabei beziehen sich einige Aussagen auf den fundamentalen Wert der Aktie, wie das Verhältnis von Zinssatz zu Dividendenrendite (Dividende/Aktienkurs), andere auf charttechnische Analysemerkmale des Aktienkurses (ob sich der Kurs über- oder unterhalb von verschiedenen gleitenden Durchschnittslinien befindet oder ob der 30-Tage Stochastikindikator eine „überkaufte“ beziehungsweise „überverkaufte“ Situation anzeigt; dieser Indikator ist definiert als  $100 \left( \frac{p - T_{30}}{H_{30} - T_{30}} \right)$ , mit  $H_{30}$

---

<sup>12</sup>*Brock/Hommes (1997a)* betrachten Beispiele mit vier Investorentypen und kalibrieren ihr Modell für IBM-Daten bezüglich Autokorrelationen von Erträgen und deren Quadraten.

Abbildung 2: Zeitreihen für Preisabweichungen vom Fundamentalwert  $x_t$ .



Parameterwerte:  $g = 1.2$ ,  $R = 1.01$ ,  $\zeta = 10$ ,  $\sigma_\delta^2 = 0.1$ ,  $w_\sigma = w_\mu = 0.75$ , (a)  $\beta = 12$ ,  $\alpha = 0.65$ , (b)  $\beta = 13$ ,  $\alpha = 0.75$ , (c) und (d)  $\beta = 9$ ,  $\alpha = 0.65$ . Bei (c) und (d) wurden zu  $x_t$  in jeder Periode ein über das Intervall  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  gleichverteilter Störterm addiert, (c)  $\varepsilon = 0.01$ , (d)  $\varepsilon = 0.05$ .

= Höchstkurs der letzten 30 Tage und  $T_{30}$  = Tiefstkurs der letzten 30 Tage). Wir definieren 14 solcher Aussagen:<sup>13</sup>

- 1–7: Zins/erwartete Dividendenrendite < 0.5; 0.83; 0.95; 1; 1.05; 1.2; 2
- 8: Kurs > 10-Tages Durchschnitt
- 9: Kurs > 20-Tages Durchschnitt
- 10: Kurs > 50-Tages Durchschnitt
- 11: Kurs > 100-Tages Durchschnitt
- 12: Kurs > 200-Tages Durchschnitt
- 13: 30-Tage Stochastikindikator > 90
- 14: 30-Tage Stochastikindikator < 10.

Die entsprechenden Antworten werden mit 1 (Bedingung erfüllt) oder 0 (Bedingung nicht erfüllt) codiert. Der Marktzustandsvektor  $Z_t$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  ist somit ein 14-stelliger binärer Code.  $Z_t$  ist eine Funktion von  $(p_t, \dots, p_{t-200}, d_t, \dots, d_{t-n})$  ( $n$  ist die Zahl der Perioden, die bei der Dividendenprognose berücksichtigt werden, siehe Gleichung (24)<sup>14</sup>). Der Bedingungsteil einer Regel gibt für jede Aussage an, ob diese entweder erfüllt sein muss (1) oder nicht erfüllt sein darf (0). Irrelevante Aussagen werden mit # codiert. Der Bedingungsteil ist also ebenfalls ein 14-stelliger Code, bestehend aus den Zeichen #, 1 und 0. Beispielsweise würde eine Regel mit dem Bedingungsteil 10#0...0 sowohl von  $Z_t = (1, 0, 1, 0, \dots, 0)$  als auch von  $Z_t = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$  aktiviert werden. Die Zahl der gesetzten Bits (0 oder 1) im Bedingungsteil wird als Spezifikation  $S$  bezeichnet. In dem genannten Beispiel ist  $S = 13$ . Jede aktivierte Regel  $j$  liefert eine Prognose für Preis und Dividende.

Die Fitness  $F_j$  einer Regel  $j$  wird als die negative Varianz ihrer Preisprognosen minus Kosten für die gesetzten Bits im Bedingungsteil definiert (siehe Gleichung (26)). Die Kosten für eine Regel sind umso höher, je „komplizierter“ eine Regel ist (das heißt je mehr Bedingungen sie setzt).

Wir unterscheiden (im Gegensatz zu *Arthur et al.*, 1997, welche nur von einem Anlegerotyp ausgehen) zwei Anlegerotypen, kurzfristige Anleger (Spekulanten) mit einem Anlagehorizont  $H$  von einer Periode und langfristige Investoren mit einem Anlagehorizont von  $H = 500$  Perioden. Spekulanten versuchen den Preis der nächsten Periode zu prognostizieren, während sich langfristige Investoren Erwartungen über  $p_{t+H}$  bilden.

Wir nehmen an, dass alle Prognoseregeln für die Preise am Ende des Anlagehorizonts von der Form  $E_{jt}^H(p_{t+H}) = a_j^H p_t + b_j^H$  sind.  $E_{jt}^H$  bezeichnet die Prognose von Regel  $j$  zu Beginn der Periode  $t$  für einen Investortyp mit Anlagehorizont  $H$  basierend auf der Informationsmenge historischer Preise und Dividenden  $F_t$ . (Die Parameter  $a_j^H$  und  $b_j^H$  hängen daher von der in Periode  $t$  aktivierten Regel  $j$  und vom Investortyp, definiert durch  $H$ , ab.) Unter der Annahme, dass die Aktienrendite pro Periode  $\mu$  über den Anlagehorizont konstant bleibt, kann auch der

<sup>13</sup>*Arthur et al.* (1997) verwenden 11 Aussagen.

<sup>14</sup>In *Arthur et al.* (1997) prognostizieren die Akteure die Summe aus Preis und Dividende.

langfristige Investor eine Preisprognose für die *nächste* Periode abgeben,

$$\mu = \left[ \frac{E_{jt}^H(p_{t+H})}{p_t} \right]^{1/H} - 1 \quad (22)$$

$$E_{jt}(p_{t+1}) = (1 + \mu)p_t. \quad (23)$$

Als Schätzer für die Dividende wird ein arithmetischer Durchschnitt der letzten  $n$  Perioden verwendet,

$$E_{jt}(d_{t+1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{t-k}. \quad (24)$$

In unseren Simulationen wählen wir  $n = 10$ . Die Schätzung für die Dividenden sind für alle Regeln und beide Investorentypen gleich. Beide Anlegertypen handeln jede Periode und passen dabei ihr Portfolio ihren veränderten Erwartungen an.

Die Orderabgabe in Periode  $t$  wird durch die Preiserwartungen der nächsten Periode bestimmt, also durch  $E_{jt}^1(p_{t+1})$  für den Spekulanten und durch  $E_{jt}(p_{t+1})$ , definiert durch Gleichung (23), für den langfristigen Investor. Dabei ist aber der Preis  $p_t$  noch unbekannt. Es muss daher zuerst eine Prognose von  $p_t$  erstellt werden. Dies erfolgt mit jener durch den Marktzustand  $Z_{t-1}$  aktivierten Regel, welche die höchste Fitness aufweist. Liegt  $p_t$  außerhalb eines für Regel  $j$  spezifischen Intervalls  $[p_j^u, p_j^o]$ , wird keine zusätzliche Order gesetzt.

Ausgehend von diesen Prognosen übermitteln die Investoren auf Basis ihrer Nachfragefunktion (3) 30 limitierte Orders, woraus der stückmaximale Kurs bestimmt wird. Jeder Investor hat eine Restriktion bezüglich des erlaubten Aktienbestands, kein Investor darf zuviel Aktien besitzen oder leerverkaufen.

Die Schätzung der bedingten Varianz von  $R_{t+1}$  in der Nachfragefunktion (3) erfolgt für alle Investoren mittels

$$V_{it}(R_{t+1}) \equiv V_t(R_{t+1}) = 0.99V_t(R_t) + 0.01(p_t + d_t - p_{t-1} - d_{t-1})^2. \quad (25)$$

Die Fitness  $F_j^H$  aller Regeln wird, nachdem der neue Preis  $p_t$  beobachtet wurde, neu berechnet. Für jede Regel mit Spezifikation  $S > 1$  fallen Kosten in Höhe von  $(S - 1)C$  ( $C > 0$ ) an. Die Fitness aller vor  $H$  Perioden aktivierten Regeln wird gemäß ihrer quadrierten Prognosefehler adaptiert,

$$F_{jt}^H = \begin{cases} (1 - \alpha)F_{j,t-1}^H - \max\{0, (S - 1)C\} - \alpha(E_{j,t-H}^H(p_t) - p_t)^2 & \text{falls Regel } j \text{ aktiviert ist} \\ F_{j,t-1}^H - \max\{0, (S - 1)C\} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (26)$$

$\alpha \in [0, 1]$ .

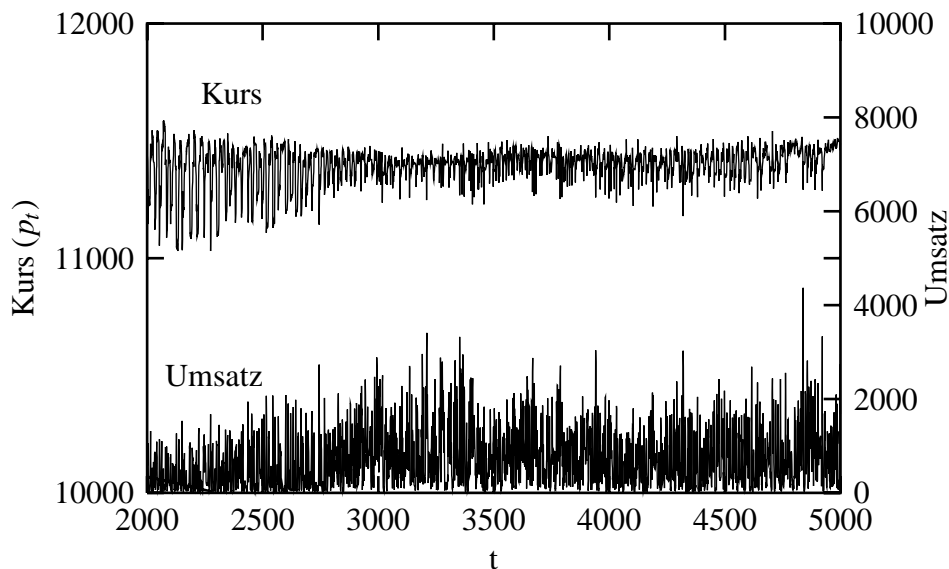
Danach wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% für den Spekulanten und 0.2% für den langfristigen Investor ein genetischer Algorithmus gestartet, um neue Regeln zu kreieren und Regeln mit schlechter Fitness zu verwerfen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Regel verworfen

wird, ist umso größer, je geringer ihre Fitness ist. Aus Kombinationen von guten Regeln werden gleich viele neue Regeln gebildet wie eliminiert wurden. Je höher die Fitness einer Regel ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit ihrer „Vermehrung“. Anschließend folgt eine Mutationsphase. Jedes Bit des Bedingungssteils, aber auch die Prognoseparameter  $a_j^H$  und  $b_j^H$  werden mit der Mutationswahrscheinlichkeit zufällig verändert.

Der Clearing-Mechanismus der Börse wird so festgelegt, dass sich der Gleichgewichtspreis als stückmaximaler Preis ergibt. Erfüllen mehrere Gleichgewichtspreise diese Eigenschaft, so wird jener stückmaximale Kurs herangezogen, der die Überschussnachfrage minimiert. Bei Nichteindeutigkeit auch dieses Kriteriums wird der höchste Kurs, der alle Bedingungen erfüllt, als Ausführungspreis bestimmt.

In unseren Simulationen entspricht eine Periode einem Börsentag. Der Zinssatz  $r$  wird mit 10% pro Jahr (250 Börsentage) angenommen, das entspricht 0.04% pro Periode. 200 Akteure verwenden 100 Regeln für ihre Preisprognosen. Durchschnittlich 60% der Akteure sind kurzfristige Anleger und 40% langfristige Investoren. Der Adaptierungsparameter  $\alpha$  der Fitness beträgt 0.005 für den Spekulanten und 0.002 für den langfristigen Investor. Die Mutationwahrscheinlichkeit beträgt für beide Anlegertypen 4%. In Abschnitt 4 präsentieren wir Simulationsergebnisse und untersuchen die erhaltenen Kurszeitreihen auf ihre statistischen Eigenschaften. *Abbildung 3* zeigt die Preis- und Umsatzzeitreihe einer Simulation.

Abbildung 3: Preis und Umsatzzeitreihe generiert von Classifier-Akteuren



## 4 Ergebnisse

Die statistischen Eigenschaften der erzeugten Preispfade der in Abschnitt 3 beschriebenen Modelle sind in den *Tabellen 1* und *2* zusammengefasst. Die in den Tabellen aufgelisteten Werte des CEE-Modells sind Mittelwerte aus 200 Simulationsläufen je Lernverfahren mit 500 Zeitschritten. Bei den Adaptive Belief Systemen (ABS) werden die Preispfade aus einem deterministischen chaotischen Modell generiert. Es genügt daher, die Eigenschaften einzelner Pfade zu betrachten. Beim KFM-Modell (künstliche Finanzmärkte) mit Classifier-Systemen (Class) wurden 10 Simulation mit je 200 Akteuren durchgeführt. Die in den Tabellen angegebenen statistischen Merkmale ergeben sich wie bei den CEE-Modellen aus der Durchschnittsbildung. Die verwendeten Parameterwerte der Simulationen sind in Abschnitt 3 angeführt (siehe *Abbildungen 1, 2* und *3*).

Das Ziel der in den *Tabellen 1* und *2* zusammengefassten Werte ist eine Analyse der Renditezeitreihen ( $p_t = \frac{p_t - p_{t-1} + d_t}{p_{t-1}}$ ) aus den CEE- und KFM-Simulationen und der wertmäßigen Erträge  $x_t - (1+r)x_{t-1}$  im ABS-Modell<sup>15</sup>. In Klammern sind die Standardabweichungen der jeweiligen Statistiken aufgelistet. Mit *LBQ* wird die Ljung-Box Q-Statistik bezeichnet, mit der die Signifikanz der Autokorrelationen getestet werden kann (siehe *Campell, 1997*). In den folgenden Tabellen wird mit *LBQ<sub>5</sub>* die Ljung-Box Q-Statistik zu einem Lag von 5 Perioden angegeben. Als Vergleich werden auch die Werte für Tageskurse des DAX von Juli 1996 bis Oktober 1998 und des S&P500 von Jänner 1995 bis Dezember 1997 angeführt.

Die Zeitreihen des CEE-Modells weisen die folgenden Eigenschaften auf:

1. Aus den Simulationen ist deutlich zu erkennen, daß unter der Annahme der Prognosemodelle (8) und (9) und der beiden Lernverfahren die Preise relativ rasch gegen das rationale Erwartungsgleichgewicht streben. Nach fünfhundert Zeitschritten beträgt die Standardabweichung der Preise bei SAC-Lernen 5.969 beziehungsweise 4.251 bei LS-Lernen, was bei einem REE von  $p^* = 99.98$  eine durchschnittliche relative Abweichung ( $\sigma_{p,500}/p^*$ ) von 5.97% beziehungsweise 4.25% ergibt (siehe *Abbildung 1*).
2. Andererseits ist aus *Tabelle 2* zu entnehmen, daß empirisch beobachtbare Phänomene wie *Fat Tails* und *Volatility Clustering* in den simulierten Preiszeitreihen nicht auftreten beziehungsweise nur unzureichend erklärt werden können. Vergleicht man nämlich die Kurtosis der Renditen des Modells mit den empirischen Werten, so ist diese viel zu gering. Bei Anwendung von SAC-Lernen sind auch die Autokorrelationen der quadrierten Renditen der künstlichen Preiszeitreihen nicht signifikant, das heißt, Volatility Clustering kann in diesem Modell nicht erklärt werden. Bei LS-Lernen sind die Autokorrelationen der quadrierten Renditen zwar signifikant von null verschieden, gleichzeitig sind aber auch die Renditen autokorreliert. Bei genauerer Betrachtung stellt sich heraus, daß diese Effekte primär auf die Autokorrelationen zweiter Ordnung zurückzuführen sind, welche bei diesem Lernverfahren durch die Two-Step-Ahead-Prognose  $E_t(p_{t+1}) = \alpha_t + \beta_t^2(p_{t-1} - \alpha_t)$

---

<sup>15</sup>Im Gegensatz zu realen Kurszeitreihen sind die durch das Modell erzeugten Zeitreihen stationär.

Tabelle 1: *Statistiken der Renditezeitreihen* ( $\rho_t$ ).

Daten	–	Mittel	Standard- abweichung	Schiefe	Kurtosis
S&P 500	–	0.0049	0.0790	–0.6793	18.2824
DAX	–	0.0009	0.0141	–0.8918	6.5190
Modell	Methode Parameter	Mittel	Standard- abweichung	Schiefe	Kurtosis
CEE	SAC	0.1008 (0.0064)	0.020 (0.0075)	0.0033 (0.0142)	3.0067 (0.0557)
	LS	0.1004 (0.0041)	0.0332 (0.0122)	0.0622 (0.0126)	3.0539 (0.1530)
ABS	$\alpha = 0.65, \beta = 12$	–0.0090	0.2330	–3.2545	17.6871
	$\alpha = 0.75, \beta = 13$	–0.0127	0.2619	–2.0247	7.7218
	$\alpha = 0.65, \beta = 9$ $\varepsilon = 0.01$	0.0144	0.1660	2.4380	11.2627
	$\varepsilon = 0.05$	–0.0071	0.1906	–0.8052	13.0998
KFM	Class	0.0002 (0.0005)	0.0127 (0.0050)	–0.2565 (0.3179)	10.0710 (3.2380)

generiert werden. Somit kann auch durch LS-Lernen Volatility Clustering nur unzureichend erklärt werden. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass bei den Simulationen ein normalverteilter iid Dividendenprozess unterstellt ist. Obwohl in der transienten Phase die Preisdynamik nichtlinear ist, weisen die generierten Renditen annähernd die Eigenschaften einer Normalverteilung auf.

Die Erträge, die mittels des Modells der Adaptive Belief Systeme generiert wurden, weisen folgende Verhaltensmuster auf:

1. Schiefe und Kurtosis sind stark ausgeprägt. Diese Eigenschaften sind auch bei den Renditen der realen Daten vorhanden.
2. Es ist uns jedoch nicht gelungen, Beispiele zu finden, wo die Erträge nicht autokorreliert sind, aber die quadrierten Erträge signifikante Autokorrelationen aufweisen. Im dritten Beispiel der Adaptive Belief Systeme ist die Autokorrelation sowohl bei den Erträgen als auch bei deren Quadraten signifikant für die ersten beiden Lags. In Beispiel 4 sind weder die Erträge noch deren Quadrate signifikant autokorreliert. Diese Beispiele zeigen, dass – wie schon in Abschnitt 3 erwähnt wurde – die hier präsentierte Modellvariante zu einfach ist, um die gewünschten Effekte erzeugen zu können.

Bei der Betrachtung der statistischen Merkmale der von Classifier Akteuren erzeugten Zeitreihe fällt folgendes auf:



Tabelle 2: Autokorrelationen der Renditen  $\rho_t$  und der quadrierten Renditen  $\rho_t^2$ .

Daten	–	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$LBQ_5$
$\rho$							
S&P 500		–0.0380	–0.0830	–0.0190	0.0260	–0.0520	7.3175
DAX		–0.026	–0.0584	0.0321	0.0619	0.0148	6.4710
$\rho^2$							
S&P 500		0.1430	0.1980	0.1010	0.0300	0.1540	309.8700
DAX		0.3161	0.0464	0.0365	0.0831	0.0988	84.4926
Modell	Methode Parameter	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$LBQ_5$
$\rho$							
CEE	SAC	0.0179 (0.0021)	0.0053 (0.0021)	0.0106 (0.0023)	0.0127 (0.0022)	0.0103 (0.0021)	5.7815 (18.3033)
	LS	0.0284 (0.0018)	–0.3559 (0.0013)	–0.0010 (0.0026)	–0.0044 (0.0024)	–0.0034 (0.0025)	69.6331 (198.6737)
ABS	$\alpha = 0.65, \beta = 12$	–0.104	0.073	0.067	–0.027	–0.112	169.9
	$\alpha = 0.75, \beta = 13$	–0.362	–0.074	0.155	–0.024	–0.081	168.7
	$\alpha = 0.65, \beta = 9$ $\varepsilon = 0.01$	0.347	0.171	–0.042	–0.125	–0.088	175.53
	$\varepsilon = 0.05$	0.014	0.091	–0.058	–0.022	–0.064	16.489
KFM	Class	0.0481 (0.0737)	0.0002 (0.0669)	–0.0627 (0.0398)	–0.0218 (0.0283)	–0.0457 (0.0224)	61.2006 (20,6501)
$\rho^2$							
CEE	SAC	0.0187 (0.0022)	0.0051 (0.0021)	0.0111 (0.0024)	0.0133 (0.0023)	0.0104 (0.0020)	5.9582 (20.8924)
	LS	0.0236 (0.0019)	–0.3297 (0.0012)	–0.0061 (0.0026)	0.0044 (0.0023)	–0.0027 (0.0026)	60.4217 (153.1934)
ABS	$\alpha = 0.65, \beta = 12$	0.018	0.043	0.047	–0.018	–0.022	26.148
	$\alpha = 0.75, \beta = 13$	–0.064	–0.047	0.087	–0.057	–0.073	22.593
	$\alpha = 0.65, \beta = 9$ $\varepsilon = 0.01$	0.254	0.229	–0.006	–0.024	–0.004	117.97
	$\varepsilon = 0.05$	0.078	0.013	0.044	–0.037	–0.024	10.198
KFM	Class	0.1326 (0.04449)	0.2169 (0.0549)	0.1573 (0.0648)	0.0962 (0.0286)	0.0851 (0.0311)	166.4756 (91.2421)

1. Die Kurtosis der Classifier-Kurszeitreihe entspricht etwa der einer empirischen Zeitreihe.
2. Die Autokorrelationen der Renditen in den Simulationen sind zu hoch im Vergleich zu empirischen Zeitreihen. Die Autokorrelationen der quadrierten Renditen sind signifikant, das heißt, es kommt zu einem Volatility Clustering.

## 5 Resümee und Ausblick

In dieser Arbeit präsentieren wir drei Finanzmarktmodelle, bei welchen wir vom Paradigma der rationalen Erwartungsbildung abweichen und den Akteuren ein beschränkt rationales Verhalten unterstellen. Bei dem Konzept der konsistenten Erwartungsgleichgewichte steht der Begriff der Rationalität im Vordergrund, die Investoren konzentrieren sich auf die empirische Konsistenz ihrer Vorhersagen. Die Anforderungen bezüglich der Informationsverarbeitung, die bei diesem Ansatz an die Akteure gestellt werden, sind wesentlich geringer als bei dem Konzept der REE. Bei den anderen beiden Modellen (Adaptive Belief Systeme und künstliche Finanzmärkte) steht die Heterogenität und die sich so ergebenden modellendogenen Preisfluktuationen im Vordergrund. Die von den Akteuren verwendeten Prädiktoren für künftige Preisentwicklungen sind einer evolutionären Selektion unterworfen. Diese Modelle sollen zu einem besseres Verständnis für die Kräfte, die für Preisfluktuationen und die sich daraus ergebenden stochastischen Eigenschaften realer Finanzzeitreihen verantwortlich sind, führen.

Bei den konsistenten Erwartungsgleichgewichtsmodellen ergeben sich sowohl unter Anwendung von Sample Autocorrelation-Lernen als auch bei Kleinstem Quadrate-Lernen Renditezeitreihen, deren Kurtosis kaum von den Werten der Normalverteilung abweicht. Auch die Autokorrelationsfunktionen der Renditen und der quadrierten Renditen aus dem Modell besitzen nicht die gleichen statistischen Eigenschaften wie empirische Finanzzeitreihen. Andererseits liegt aber das Hauptaugenmerk des konsistenten Erwartungsgleichgewichts nicht auf einer unmittelbaren Nachbildung der sogenannten Stylized Facts, sondern auf einer theoretisch fundierten Analyse eines Gleichgewichtskonzeptes, welches vom perfekt rationalen Erwartungsgleichgewicht abweicht, aber dennoch strenge Anforderungen an die Erwartungsbildung der Akteure hinsichtlich der Konsistenz zu den von den Akteuren beobachtbaren Variablen stellt. Unter diesem Gesichtspunkt stellt das Konzept der konsistenten Erwartungsgleichgewichte sehr wohl eine Alternative zu den rationalen Gleichgewichtsmodellen dar, wobei die oft gegen adaptive Erwartungsmodelle vorgebrachten Kritikpunkte der Miteinbeziehung von Ad-hoc-Regeln, durch das Konzept der Konsistenz der Vorhersagen mit den Modellvariablen auf ein Minimum reduziert werden. Als Ergebnis unserer Analyse bleibt aber festzuhalten, dass in diesem einfachen Kapitalmarktmodell das rationale und das konsistente Erwartungsgleichgewicht zusammenfallen. Auch wenn nicht alle Preispfade in den Simulationen konvergieren, so ist doch in den meisten Fällen eine Konvergenz zum rationalen Erwartungsgleichgewicht festzustellen. Das REE wird also unter minimalen Anforderungen an die Informationsverarbeitung der Akteure erreicht.

Bisher wurden in diesem Kapitalmarktmodell nur konvergente Pfade der Preiszeitreihen zur Analyse herangezogen. Nichtsdestotrotz gibt es sowohl bei Sample Autocorrelation-Lernen als auch bei Kleinstem Quadrate-Lernen Pfade, welche nicht zum rationalen Erwartungsgleichgewicht konvergieren. Hieraus ergibt sich die theoretisch interessante Fragestellung der Konvergenzeigenschaften der einzelnen Lernverfahren. Oft wird vermutet, dass adaptive Modelle – zumindest in den meisten Fällen – gegen das rationale Erwartungsgleichgewicht konvergieren, das heißt, das (Grenz-)Verhalten der Zustandsvariablen des adaptiven Modells entspricht den Eigenschaften des REE-Modells. Mittels unserer Simulationen kann nur unzureichend festgestellt werden, ob Divergenz in den beiden Modellen nur in einem kleinen oder in einem großen Parameterbereich auftreten kann. Diese Fragestellung wird in *Pötzelberger/Sögner (1999)* behandelt. Obwohl dies bloß von theoretischem Interesse erscheint, hätte ein großer Bereich, in dem keine Konvergenz auftritt, auch Auswirkungen auf die Anwendung von rationalen Erwartungsmodellen in der Finanzwirtschaft. Da in der Empirie nicht von perfekt rationalen Akteuren – insbesondere hinsichtlich der Verarbeitung der vorhandenen Informationen – ausgegangen werden kann, würde ein starkes Auseinanderklaffen von REE- und adaptiven Modellen für gewisse Parameter zu einer unzureichenden Beschreibung der Ökonomie durch das REE-Modell führen. Diese theoretische Fragestellung hat daher auch eine wesentliche empirische Relevanz.

Das im Rahmen der Adaptive Belief Systeme untersuchte Modell liefert Ertragszeitreihen, deren Häufigkeitsverteilungen Eigenschaften besitzen, wie sie bei realen Zeitreihen auftreten. Die Autokorrelationen der Erträge beziehungsweise der quadrierten Erträge weichen jedoch von jenen realer Zeitreihen eindeutig ab. Das heißt, der Effekt des Volatility Clusterings bei gleichzeitiger linearer Unabhängigkeit der Erträge kann nicht durch dieses Modell beschrieben werden. Dies gelingt in *Gaunersdorfer/Hommes (2000)*, wo Prädiktoren mittels Preisdifferenzen formuliert werden. Eine weitere Möglichkeit, realitätsnähere Ertragszeitreihen zu erzeugen, ist in *Dangl/Gaunersdorfer (1999)* beschrieben. Dabei wird die „Intensity of Choice“ (Parameter  $\beta$  in Gleichung (19)), die den Grad der Heterogenität bestimmt, nicht mehr als konstant angenommen, sondern einer endogenen Dynamik entsprechend in jedem Zeitschritt angepasst. Bei der Festlegung dieser Dynamik ist die in *Brock (1993)* erwähnte Parallele zwischen der Gleichgewichtsdynamik der Adaptive Belief Systeme und jener von thermodynamischen Systemen (Boltzmann-Statistik) hilfreich, die eine Interpretation von  $\beta$  als inverse Temperatur zulässt. Ziel unserer weiteren Anstrengungen ist es, durch das beschriebene Abgehen von konstanter Intensity of Choice die Autokorrelationsstruktur der Ertragszeitreihen besser an reale Vorgaben anzupassen.

Bei den künstlichen Finanzmärkten mit Akteuren, die ihre Erwartungsbildungen mittels Classifier Systemen bestimmen, sind die Simulationsergebnisse ebenfalls noch nicht befriedigend. Insbesondere die Autokorrelationen der Renditen sind noch zu hoch. Es müssen daher noch Anstrengungen unternommen werden, um ein zufriedenstellendes Ergebnis zu bekommen. Die zweite wichtige Aufgabe wird es sein, die Interdependenz zwischen Kurs, Umsatz und den von den Akteuren verwendeten Regeln zu erklären. Es ist vorgesehen, eine Analyseprozedur zu implementieren, welche die von den Akteuren zur Prognose des zukünftigen Preises verwendeten Regeln erfasst und auswertet.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die vorgestellten Ansätze eine vielversprechende Al-

ternative zu traditionellen Modellen bilden, das Geschehen auf realen Finanzmärkten zu erklären. Was sie tatsächlich in der Lage sind zu erklären, muss in weiteren Modellentwicklungen noch detaillierter analysiert werden.

## 6 Literatur

- Arthur, W. Brian/Holland, John H./LeBaron, Blake/Palmer, Richard/Taylor, Paul* (1997), Asset Pricing under Endogenous Expectations in an Artificial Stock Market, in: Arthur, W. Brian/Durlauf, Steven N./Lane, David A. (Hrsg.), *The Economy as an Evolving Complex System II*, Addison-Wesley, S. 15–44.
- Beja, A./Goldman, B.* (1980), On the Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium, in: *The Journal of Finance*, Vol. 35, S. 235–248.
- Bray, Margaret* (1982), Learning, Estimation and the Stability of Rational Expectations, in: *Journal of Economic Theory*, Vol. 26, S. 318–339.
- Brock, William A.* (1993), Pathways to Randomness in the Economy: Emergent Nonlinearity and Chaos in Economics and Finance, in: *Estudios Económicos*, Vol. 8, S. 3–55.
- Brock, William A.* (1997), Asset Price Behavior in Complex Environments, in: Arthur, W. Brian/Durlauf, Steven N./Lane David A. (Hrsg.), *The Economy as an Evolving Complex System II*, Addison-Wesley, S. 385–423.
- Brock, William A./Hommes, Cars H.* (1997a), A Rational Route to Randomness, in: *Econometrica*, Vol. 65, S. 1059–1095.
- Brock, William A./Hommes, Cars H.* (1997b), Models of Complexity in Economics and Finance, in: Heij, Christiaan/Schumacher, Hans/Hanzon, Bernard/Praagman, Kees (Hrsg.), *System Dynamics in Economic and Financial Models*, John Wiley, S. 3–44.
- Brock, William A./Hommes, Cars H.* (1998), Heterogeneous Beliefs and Bifurcation Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model, in: *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 22, S. 1235–1274.
- Brock, William A./Hommes, Cars H.* (1999), Rational Animal Spirits, in: Herings, P. Jean-Jacques/van der Laan, G./Talman, A. J. J. (Hrsg.), *The Theory of Markets*, North-Holland, S. 109–137.
- Brock, William A./LeBaron, Blake* (1996), A Dynamical Structural Model for Stock Return Volatility and Trading Volume, in: *The Review of Economics and Statistics*, Vol 78, S. 94–110.
- Brunnermeier, Markus K.* (1998), Prices, Price Processes, Volume and their Information – A Survey of the Market Microstructure Literature, FMG Discussion Paper 270, The London School of Economics.
- Campbell, John Y./Lo, Andrew W./MacKinlay, A. Craig* (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.

- Chiarella, Carl* (1992), The Dynamics of Speculative Behaviour, in: *Annals of Operations Research* Vol. 37, S. 101–123.
- Dangl, Thomas/Gaunersdorfer, Andrea* (1999), On the Dynamics of Adaptive Belief Systems with Endogenous Intensity of Choice, mimeo.
- Daniel, Ken/Hirshleifer, David/Subrahmanyam, Avaniidhar* (1998), Investor Psychology and security Market Under- and Overreactions, in: *The Journal of Finance*, Vol. 53, S. 1839–1885.
- Day, Richard H./Huang, Weihong* (1990), Bulls, Bears and Market Sheep, in: *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 14, S. 299–329.
- De Grauwe, Paul/Dewachter, Hans/Embrechts, Mark J.* (1993), *Exchange Rate Theory*, Blackwell.
- Franke, Reiner/Sethi, Rajiv* (1993), Cautious Trend-Seeking and Complex Dynamics, University of Bielefeld.
- Frankel, Jeffrey A./Froot, Ken A.* (1988), Chartists, Fundamentalists and the Demand for Dollars, in: *Greek Economic Review*, Vol. 10, S. 49–102.
- Gaunersdorfer Andrea* (2000), Endogenous Fluctuations in a Simple Asset Pricing Model with Heterogeneous Agents, in: *Journal of Economic Dynamics and Control* Vol. 24, S. 799–831.
- Gaunersdorfer, Andrea/Hommes, Cars H.* (1999), A Nonlinear Structural Model of Volatility Clustering, SFB-WP No. 63, University of Vienna and Vienna University of Economics and Business Administration.
- Ghezzi, Luca L.* (1992), Bifurcations in a Stock Market Model, in: *Systems & Control Letters* Vol. 19, S. 371–378.
- Grandmont, Jean-Michel* (1998), Expectations Formations and Stability of Large Socioeconomic Systems, in: *Econometrica*, Vol. 66, S. 741–781.
- Grossman, Sanford J./Stiglitz, Joseph E.* (1989), On the Impossibility of Informationally Efficient Markets, in: *The American Economic Review*, Vol. 70, S. 393–408.
- Haugen, Robert A.* (1998), *Beast on Wall Street – How Stock Volatility Devours Our Wealth*, Prentice Hall.
- Holland, John H.* (1975), *Adaption in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press.
- Holland, John H./Holyoak, Keith J./Nisbett, Richard E./Thagard, Paul R.* (1986), *Induction*, MIT Press.

- Hommes, Cars H./Sorger, Gerhard* (1998), Consistent Expectations Equilibria, in: *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 2, S. 287–321.
- Kleidon, Allen W.* (1995), Stock Market Crashes, in: *Jarrow, K./Maksimovic, V./Ziembra, W.* (Hrsg.), *Finance Handbook*, Amsterdam North Holland.
- Kurz, Mordecai* (Hrsg.) (1997), *Endogenous Economic Fluctuations*, Springer.
- LeBaron, Blake* (1998), Agent Based Computational Finance: Suggested Readings and Early Research, Working Paper.
- LeBaron, Blake/Arthur, W. Brian/Palmer, Richard* (1999), Time Series Properties of an Artificial Stock Market, in: *Journal of Economic Dynamics and Control* Vol. 23, S. 1487–1516.
- Lux, Thomas* (1994), Complex Dynamics in Speculative Markets: A Survey of the Evidence and Some Implications for Theoretical Analysis, *Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge* 67, University of Bamberg.
- Lux, Thomas* (1995), Herd Behavior, Bubbles and Crashes, in: *The Economic Journal*, Vol. 105, S. 881–896.
- Lux, Thomas/Marchesi, Michele* (1998), Volatility in Financial Markets: A Micro-Simulation of Interactive Agents, Working Paper presented at the 3<sup>rd</sup> Workshop on Economics with Heterogeneous Interacting Agents, University of Ancona.
- Malliari, A. G./Stein, Jerome L.* (1999), Methodological issues in asset pricing: Random walk or chaotic dynamics, in: *Journal of Banking and Finance*, Vol. 23, S. 1605–1635.
- Marcet, Albert/Sargent, Thomas J.* (1989), Convergence of Least Squares Learning Mechanics in Self-Referential Linear Stochastic Models, in: *Journal of Economic Theory*, Vol. 48, S. 337–368.
- Manski, Charles F./McFadden, Daniel L.* (1990), *Structural Analysis of Discrete Data with Economic Applications*, 4. Aufl., MIT Press.
- Muth, John F.* (1961), Rational Expectations and the Theory of Price Movements, in: *Econometrica*, Vol. 29, S. 315–335.
- Nelson, Daniel B.* (1992), Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance with the Wrong Model, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 52, S. 61–90.
- Pagan, Adrian* (1996), The Econometrics of Financial Markets, in: *Journal of Empirical Finance*, Vol. 3, S. 15–102.
- Pötzelberger, Klaus/Sögner, Leopold* (1999), Sample Autocorrelation Learning in a Capital Market Model, SFB-Working Paper No. 57, Wirtschaftsuniversität Wien.

*Routledge, Brian R.* (1999), Adaptive Learning in Financial Markets, in: *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, S. 1165–1202.

*Sethi, R Rajiv* (1996), Endogenous Regime Switching in Speculative Markets, in: *Structural Change and Economic Dynamics*, Vol. 7, S. 99–118.

*Sögner, Leopold/Mitlöhner, Johann* (1999), Consistent Expectations Equilibria and Learning in a Stock Market, SFB-Working Paper No. 30, *Wirtschaftsuniversität Wien*.