

LAGRANGE–INVERSION

JOSEF HOFBAUER

Institut für Mathematik der Universität Wien,
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria.

1. Die Lagrangesche Inversionsformel. Die Lagrangesche Inversionsformel läßt sich beispielsweise in der folgenden Art formulieren:

Sei $g(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$ eine (formale) Potenzreihe (f.P.R.) in x mit $\varphi(0) \neq 0$ und $f(x)$ eine f.P.R., die man nach den Potenzen von $g(x)$ entwickelt:

$$(1.1) \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k g(x)^k = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{x^k}{\varphi(x)^k}.$$

Dann sind die Koeffizienten c_k durch folgende Formeln gegeben:

1. *Version der Lagrangeschen Formel:*

$$(I) \quad c_n = \frac{1}{n} f'(x) g(x)^{-n} \Big|_{x^{-1}} = \frac{1}{n} f'(x) \varphi(x)^n \Big|_{x^{n-1}}.$$

2. *Version der Lagrangeschen Formel:*

$$(II) \quad c_n = f(x) g'(x) g(x)^{-n-1} \Big|_{x^{-1}} = f(x) g'(x) \varphi(x)^{n+1} \Big|_{x^n}.$$

Dabei bedeutet $h(x)|_{x^n}$ den Koeffizienten von x^n in der formalen Potenz- oder Laurentreihe $h(x)$. Für $h(x)|_{x^{-1}}$ werden wir manchmal auch $\text{Res } h(x)$ und später $M(h(x)dx)$ schreiben.

Wählt man in (1.1) $f(x) = x$, so erhält man die Koeffizienten der zu $g(x)$ (bezüglich Komposition) inversen Potenzreihe.

Einer der einfachsten Beweise der Lagrangeschen Inversionsformel ist der folgende: Wir zeigen zunächst

Lemma 1. *Ist $g(x)$ wie oben eine f.P.R. der Ordnung 1 (wie üblich ist die Ordnung einer formalen Potenzreihe $g(x)$ definitionsgemäß der kleinste Index s , sodaß der Koeffizient von x^s in $g(x)$ nicht verschwindet), dann gilt für beliebige ganze Zahlen n*

$$(1.2) \quad \frac{g'(x)}{g^{n+1}(x)} \Big|_{x^{-1}} = \delta_{n0}.$$

BEWEIS. Ist nämlich $n \neq 0$, dann ist $g(x)g(x)^{-n+1} = -\frac{1}{n}(g(x)^{-n})'$ und hat daher als Ableitung einer formalen Laurentreihe das Residuum 0. Für $n = 0$ ist

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

und da der zweite Summand wegen $\varphi(0) \neq 0$ eine f.P.R. ist, ist das Residuum = 1.

Um jetzt die 1. Version zu beweisen, leiten wir die Entwicklung (1.1) ab:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot g(x)^{k-1} g'(x),$$

dividieren durch $g(x)^n$ und nehmen das Residuum:

$$\text{Res } f'(x)g(x)^{-n} = \text{Res } \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k \cdot g'(x)g(x)^{-n+k-1} = nc_n$$

wegen Lemma 1.

Für die 2. Version multiplizieren wir (1.1) bloß mit $g'(x)g(x)^{-n-1}$, bestimmen das Residuum und wenden wieder Lemma 1 an:

$$\text{Res } f(x)g'(x)g(x)^{-n-1} = \text{Res } \sum_{k=1}^{\infty} c_k g'(x)g(x)^{-n+k-1} = c_n.$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt.

BEISPIELE.

(1) Die zu $g(x) = xe^{-ax}$ inverse Reihe ist

$$(1.3) \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} z^n,$$

weil man aus (I) für $f(x) = x$ und $\varphi(x) = e^{ax}$

$$c_n = \frac{1}{n} e^{ax} \Big|_{x^{n-1}} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

erhält.

(2) Es gelten die Entwicklungen

$$(1.4) \quad e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} (ze^{-az})^k$$

und

$$(1.5) \quad \frac{e^{xz}}{1-az} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+ak)^k}{k!} (ze^{-az})^k.$$

Multipliziert man (1.4) mit e^{yz} und vergleicht die Koeffizienten von z^n , erhält man *Abels Identität*:

$$(1.6) \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x+ak)^{k-1} (y-ak)^{n-k}.$$

(3) Es gilt

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(a, b) (z(1+z)^b)^k$$

mit

$$G_n(a, b) = \frac{1}{n} a (1+z)^{a-1} (1+z)^{-nb} \Big|_{z^{n-1}} = \frac{a}{n} \binom{a-1-nb}{n-1} = \frac{a}{a-bn} \binom{a-bn}{n}$$

Aus $(1+z)^{a+c} = (1+z)^a (1+z)^c$ folgt dann

$$(1.7) \quad G_n(a+c, b) = \sum_{k=0}^n G_k(a, b) G_{n-k}(c, b).$$

2. Anwendungen in der Kombinatorik. Eine der schönsten Anwendungen der Lagrangeschen Formel auf ein kombinatorisches Problem ist die Herleitung von Cayleys Formel für die Anzahl der Wurzelbäume. Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, dessen Knoten durchnummeriert sind, wobei ein Knoten — die Wurzel — ausgezeichnet ist.

Sei b_n die Anzahl der Wurzelbäume über der Knotenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ und

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Bezeichnen wir außerdem mit w_n die Anzahl der *Wurzelwälder* (= Graphen, deren Komponenten Wurzelbäume sind) über $\{1, 2, \dots, n\}$. Aus der Exponentialformel folgt dann

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} t^n = e^{s(t)}.$$

Nun gilt aber $(n+1)w_n = s_{n+1}$: Denn aus jedem Wurzelbaum mit $n+1$ Knoten entsteht durch Weglassen der Wurzel ein Wurzelwalds mit n Knoten. Korrigiert man jetzt noch die Numerierung, indem man dem $(n+1)$ -ten Knoten die Nummer der weggelassenen Wurzel gibt, so wird aus der 1 : 1 Abbildung eine $(n+1) : 1$ -Abbildung. Daher ist $s(t) = te^{s(t)}$ oder $t = se^{-s}$. Aus (1.3) folgt also

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n,$$

und somit $b_n = n^{n-1}$.

Ein anderer Problemkreis, bei dem die Lagrangesche Inversionsformel nützlich, wenn auch nicht notwendig ist, sind die *Catalanzahlen*. Bei den meisten kombinatorischen Fragestellungen, bei denen die Catalanzahlen C_n auftauchen, z.B. Anzahl der Triangulierungen eines $(n+2)$ -Ecks, Anzahl der binären Bäume mit n Stellen, Anzahl der verschiedenen Klammerungen eines Produktes von $n+1$ Faktoren, Anzahl der Wege im \mathbb{R}^2 , die $(0,0)$ mit $(2n,0)$ verbinden und oberhalb der x -Achse verlaufen, usw., erhält man durch eine einfache Überlegung die Rekursionsformel

$$(2.1) \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1.$$

Um die C_n explizit zu berechnen, betrachtet man die erzeugende Funktion

$$(2.2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Aus (2.1) folgt dann

$$(2.3) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = f(x)^2.$$

Daraus kann man analog zum vorigen Beispiel die Koeffizienten C_n berechnen. Dazu setzen wir z.B. $f(x) = 1 + y(x)$, sodaß (2.3) zu

$$y = x(1 + y)^2 \quad \text{oder} \quad x = y(1 + y)^{-2}$$

wird. In (2.2) eingesetzt ergibt das

$$(2.5) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{y^n}{(1 + y)^{2n}},$$

woraus mittels (I)

$$C_n = \frac{1}{n} (1 + y)^{2n} \Big|_{y^{n-1}} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ folgt.}$$

Hätten wir $z = x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$ gesetzt, so erhielten wir aus (2.3)

$$z - x = z^2 \quad \text{oder} \quad x = z(1 - z),$$

also die zu (2.5) analoge Entwicklung

$$(2.6) \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} z^n (1 - z)^n,$$

woraus genauso $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ folgt.

3. Die mehrdimensionale Verallgemeinerung von Jacobi–Good. Wir verwenden die übliche Multiindexschreibweise. Eine f.P.R. in den s Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ ist eine Reihe

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1, \dots, k_s \geq 0} a_{k_1 \dots k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}.$$

Eine *formale Laurentreihe* (f.L.R.) sei eine Reihe der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1 \geq n_1, \dots, k_s \geq n_s} a_{k_1 \dots k_s} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s},$$

für einen Multiindex $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^s$.

Wir betrachten jetzt ein System $g = (g_i)_{1 \leq i \leq s}$ von f.P.R. in der s -dimensionalen Variablen \mathbf{x} , das der Einfachheit halber von der Form

$$(3.1) \quad g_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{\varphi_i(\mathbf{x})}$$

ist, wobei $\varphi_i(\mathbf{x})$ eine f.P.R. mit $\varphi_i(\mathbf{0}) \neq 0$ ist. (Es würde genügen, daß die Jacobische von g im Nullpunkt eine Diagonalmatrix ist. Man müßte nur die f.L.R. etwas allgemeiner definieren, damit die folgenden Überlegungen sinnvoll bleiben.) Man kann zu (1.1) analoge Entwicklungen betrachten:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})^{\mathbf{k}} = f(\mathbf{0}) + \sum c_{k_1 \dots k_s} g_1(\mathbf{x})^{k_1} \dots g_s(\mathbf{x})^{k_s}.$$

Dann gilt das folgende mehrdimensionale Analogon der zweiten Version der Lagrangeformel (von der 1. Version sind nur äußerst komplizierte Verallgemeinerungen bekannt):

$$(3.2) \quad c_{\mathbf{n}} = f(\mathbf{x}) \cdot \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot g(\mathbf{x})^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{e}} = f(\mathbf{x}) \cdot \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \varphi(\mathbf{x})^{\mathbf{n}+\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{n}}.$$

Dabei ist $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$. Im Vergleich mit (II) ist die Ableitung $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante $\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$ des Systems g ersetzt.

Der folgende Beweis stammt von J. Cigler.

Offensichtlich war der entscheidende Schritt im eindimensionalen Fall das Lemma 1. Wir müssen jetzt also zeigen:

Lemma 2. *Sei g wie in (3.1). Dann ist*

$$\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot g(\mathbf{x})^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{e}} = \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{0}}.$$

Die Relation (1.2) ist äquivalent mit

$$(3.3) \quad f(g(x))g'(x) \Big|_{x^{-1}} = f(x) \Big|_{x^{-1}} \text{ für beliebige f.L.R. } f(x).$$

Das erinnert an die Substitutionsformel für Integrale. Der Zusammenhang damit wird klar, wenn man den Koeffizienten von x^{-1} also das Residuum, durch das bekannte Kurvenintegral darstellt. Das legt auch nahe, daß im Mehrdimensionalen $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante ersetzt wird. Um diesen Zusammenhang besser hervorzuheben, erweist sich eine neue Notation als zweckmäßig: Statt $f(x)|_{x^{-1}}$ schreiben wir $M(f(x)dx)$. Das lineare Funktional M entspricht also dem Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$. Die Integralschreibweise wollen wir aber im Hinblick auf unsere formalen Potenzreihen vermeiden. Wir definieren also

$$(3.4) \quad M(f(\mathbf{x})d\mathbf{x}) = M(f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_s) := f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}}.$$

Genaugenommen wählen wir M also als lineares Funktional auf den alternierenden Differentialformen von Dimension und Grad s (die wir hier allerdings als Modul über den f.L.R. statt den C^∞ -Funktionen auffassen).

BEWEIS VON LEMMA 2. Für eine f.L.R. $g(\mathbf{x})$ sei

$$dg = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j.$$

Daraus folgt

$$(3.5) \quad \begin{aligned} dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_s &= \left(\sum_j \frac{\partial g_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_j \frac{\partial g_s}{\partial x_j} dx_j \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_s. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst für beliebige f.L.R. g_1, \dots, g_s

$$(3.6) \quad M(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s) = 0.$$

Da alles linear ist, brauchen wir nur den Fall

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_i} = x_1^{k_{i1}} x_2^{k_{i2}} \dots x_s^{k_{is}}$$

betrachten. Dann ist $\partial g_i(\mathbf{x})/\partial x_j = k_{ij} \mathbf{x}^{\mathbf{k}_i} / x_j$ und

$$\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_s} \det \left(\frac{k_{ij}}{x_j} \right) = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_s - \mathbf{e}} \det(k_{ij}).$$

Ist $\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_s = 0$, dann verschwindet auch $\det(k_{ij})$, weil die Zeilensumme = 0 ist. Damit ist (3.6) gezeigt.

Weiters gilt für beliebige g_1, \dots, g_s

$$(3.7) \quad M\left(\frac{dx_1}{x_k} \wedge \dots \wedge \frac{dx_k}{x_k} \wedge dg_{k+1} \wedge \dots \wedge dg_s\right) = 0 \text{ für } k < s.$$

Dieser Ausdruck ist nämlich laut Definition gleich

$$M\left(\frac{1}{x_1 \cdots x_k} \cdot D(\mathbf{x}) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_s\right) \text{ mit } D(\mathbf{x}) = \det(\partial g_i / \partial x_j)_{k < i, j \leq s},$$

und diese Determinante hat wegen (3.6) keinen $\frac{1}{x_{k+1} \cdots x_s}$ -Term.

Sind jetzt g_1, \dots, g_k von der speziellen Form (3.1), die weiteren g_{k+1}, \dots, g_s jedoch noch beliebige f.L.R., so gilt auch

$$(3.8) \quad M\left(\frac{dg_1}{g_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dg_k}{g_k} \wedge dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_s\right) = 0 \text{ für } k < s.$$

Das folgt wegen

$$(3.9) \quad \frac{dg_i}{g_i} = \frac{dx_i}{x_i} - d(\log \varphi_i) \text{ für } i \leq k$$

durch Induktion nach k aus (3.7).

Für $k = s$ gilt jedoch, falls jetzt alle g_i (3.1) erfüllen,

$$(3.10) \quad M\left(\frac{dg_1}{g_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dg_s}{g_s}\right) = 1.$$

Das zeigt man ebenfalls mit (3.9). Damit ist der Fall $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ im Lemma 2 erledigt.

Sei jetzt $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Für jedes i mit $n_i \neq 0$ ist dann

$$g_i^{-n_i-1} dg_i = -\frac{1}{n_i} d(g_i^{-n_i}).$$

Die Behauptung $M(g^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}} dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_s) = 0$ reduziert sich daher auf den Typ (3.8). Damit ist das Lemma 2 vollständig gezeigt, und analog zum eindimensionalen Fall folgt die Formel von Lagrange–Good (3.2).

Als typische Anwendung wollen wir daraus das Master–Theorem von MacMahon [29] herleiten:

Master–Theorem. Sei $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ eine beliebige Matrix und

$$D(\mathbf{x}) = \det(\delta_{ij} - a_{ij} x_j).$$

Dann ist der Koeffizient von $\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$ in $\frac{1}{D(\mathbf{x})}$ gleich dem Koeffizienten von $x_1^{n_1} \cdots x_s^{n_s}$ in $(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1s}x_s)^{n_1} \cdots (a_{s1}x_1 + \cdots + a_{ss}x_s)^{n_s}$.

BEWEIS. Wir wählen $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{j=1}^s a_{ij} x_j$ und $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{D(g(\mathbf{x}))}$. Dann ist $\partial \varphi_i / \partial x_j = a_{ij}$ und $\partial g_i / \partial x_j = (\delta_{ij} - a_{ij} g_i) \varphi_i^{-1}$. Außerdem gilt

$$\det(\delta_{ij} - a_{ij} x_j) = x_1 \cdots x_s \det\left(\frac{\delta_{ij}}{x_j} - a_{ij}\right) = x_1 \cdots x_s \det\left(\frac{\delta_{ij}}{x_j} - a_{ij}\right) = \det(\delta_{ij} - a_{ij} x_j).$$

Anwendung von (3.2) ergibt daher, daß der Koeffizient $c_{\mathbf{n}}$ von $g(\mathbf{x})^{\mathbf{n}}$ in $\frac{1}{D(g(\mathbf{x}))}$

$$c_{\mathbf{n}} = \prod_i \left(1 + \sum_j a_{ij} x_j\right)^{n_i} \Big|_{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}} = \prod_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right)^{n_i} \Big|_{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}$$

ist.

Formel (3.2) wird meistens nach Good [19] benannt. Sie war aber bereits Jacobi [23] bekannt. Weitere Beweise findet man in [5, 20, 24, 34].

4. Inverse Relationen. Das einfachste Paar inverser Relationen ist wohlbekannt:

$$(4.1) \quad a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k.$$

An die 60 weitere derartige Relationen findet man, in verschiedene Gruppen klassifiziert, bei Riordan [31], der ein Drittel seines Buches diesem Themenkreis widmet. Er gibt aber jedesmal ad hoc-Beweise und entwickelt keine gemeinsam zugrundeliegende Theorie. Offensichtlich besagt ein solches Paar inverser Relationen

$$(4.2) \quad a_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^n \beta_{nk} a_k,$$

daß die beiden unendlichen Dreiecksmatrizen (α_{nk}) und (β_{nk}) zueinander invers sind:

$$(4.3) \quad \sum_k \alpha_{nk} \beta_{km} = \delta_{nm} = \sum_k \beta_{nk} \alpha_{km}.$$

Egoritschew [10] hat nun folgenden Ansatz zur Erzeugung inverser Relationen untersucht:

Seien $g(x), h(x)$ f.P.R. der Ordnung 1 und $f(x)$ eine f.P.R. der Ordnung 0, also mit $f(0) \neq 0$. Dann erhält man ein Paar inverser Relationen auf folgende Weise:

$$(4.4) \quad f(x)g(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{nk} h(x)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x)^{-1}h(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_{nk} g(x)^n.$$

Die Koeffizienten α_{nk}, β_{nk} dieser Entwicklungen lassen sich natürlich mittels der Lagrangeformel (II) sofort angeben:

$$(4.5) \quad \alpha_{nk} = M\left(\frac{f(x)g(x)^k h'(x)}{h(x)^{n+1}} dx\right) \quad \text{und} \quad \beta_{nk} = M\left(\frac{h(x)^k g'(x)}{f(x)g(x)^{n+1}} dx\right).$$

Egoritschew hat dann festgestellt, daß die meisten bekannten inversen Relationen, insbesondere *alle* in Riordan [31] enthaltenen, unter dieses einfache Schema fallen.

BEISPIEL.

(1) $\alpha_{nk} = \binom{n+k}{k+p}$ (siehe [31, Tafel 2.1.4]). Es gilt

$$\alpha_{nk} = \binom{n+p}{k+p} = M\left(\frac{(1+x)^{n+p}}{x^{n-k+1}} dx\right).$$

Entsprechend (4.5) wählen wir $h(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = x$, und wegen $h'(x) = (1+x)^{-2}$ schließlich $f(x) = (1+x)^{p+1}$.

$$\Rightarrow \beta_{nk} = M\left(\frac{(1+x)^{-k-p-1}}{x^{n+1-k}} dx\right) = \binom{-k-p-1}{n-k} = (-1)^{n-k} \binom{n+p}{n-k}.$$

(2) $\alpha_{nk} = \binom{p+qk-k}{n-k}$ ([31, Tafel 2.2.1]). Es gilt

$$\alpha_{nk} = M\left(\frac{(1+x)^{p+qk-k}}{x^{n-k+1}}dx\right).$$

Hier wählen wir also $g(x) = x(1+x)^{q-1}$, $h(x) = x$, $f(x) = (1+x)^p$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta_{nk} &= M\left(\frac{(1+x)^{q-1} + x(q-1)(1+x)^{q-2}}{(1+x)^p(1+x)^{(q-1)(n+1)}x^{n-k+1}}dx\right) \\ &= M\left(\frac{(1+x)^{-n(q-1)-p-1}(1+qx)}{x^{n-k+1}}dx\right) \\ &= \binom{-1-p-n(q-1)}{n-k} + q\binom{-1-p-n(q-1)}{n-k-1} \\ &= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k} + (-1)^{n-k-1}q\binom{p+nq-k-1}{n-k-1} \\ &= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k}\frac{p+kq-k}{p+nq-k}. \end{aligned}$$

(3) $a_n = \sum_k \binom{n}{k} b_{n-ck}$ ([31, Tafel 2.4.1]). Hier gilt

$$\alpha_{n,n-ck} = \binom{n}{k} = M\left(\frac{(1+x^c)^n}{x^{ck+1}}dx\right).$$

Wir wählen $g(x) = x$, $h(x) = \frac{x}{1+x^c}$, $h'(x) = \frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^2}$, $f(x) = \frac{1+x^c}{1+x^c-cx^c}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta_{n,n-ck} &= M\left(\frac{g'}{f \cdot g} \left(\frac{h}{g}\right)^n \frac{dx}{h^{ck}}\right) \\ &= M\left(\frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^{n+1-ck}} \frac{dx}{x^{1+ck}}\right) \\ &= \binom{ck-n}{k} - c\binom{ck-n-1}{k-1} \\ &= (-1)^k \binom{n-ck+k-1}{k} - c(-1)^{k-1} \binom{n-ck+k-1}{k-1} \\ &= (-1)^k \frac{n}{k} \binom{n-ck+k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Ein Spezialfall, beziehungsweise bloß eine andere Schreibweise für inverse Relationen, ist die *umbrale Inversion* von Polynomen. Nehmen wir z.B. die *Gegenbauerpolynome* $C_n^\lambda(x)$, die durch die erzeugende Funktion

$$(4.6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda}$$

definiert sind. Daraus lassen sich die C_n^λ bekanntlich leicht berechnen:

$$(4.7) \quad C_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(\lambda)^{(n-k)} (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}.$$

Hier und im Folgenden bedeutet das Symbol $(a)^{(n)}$ die aufsteigenden Faktoriellen, $(a)^{(n)} := a(a+1) \cdots (a+n-1)$.

Wir wollen nun umgekehrt x^n nach den $C_k^\lambda(x)$ entwickeln. Dazu schreiben wir (4.6) in der Form

$$(1+t^2)^\lambda \sum_k C_k^\lambda(x) t^k = \left(1 - \frac{2tx}{1+t^2}\right)^{-\lambda} = \sum_n \frac{(\lambda)^{(n)}}{n!} (2x)^n \frac{t^n}{(1+t^2)^n}.$$

Diese Gleichung kann man als Entwicklung der Funktion auf der linken Seite nach Potenzen von $\frac{t}{1+t^2}$ interpretieren. Für die Koeffizienten muß daher nach (II) gelten:

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda)^{(n)}}{n!} (2x)^n &= (1+t^2)^\lambda \cdot \sum_k C_k^\lambda(x) t^k \cdot (1+t^2)^{n+1} \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} \Big|_{t^n} \\ &= \sum_k C_k^\lambda(x) t^k \cdot (1+t^2)^{\lambda+n-1} (1-t^2) \Big|_{t^n} \\ &= \sum_k C_{n-2k}^\lambda(x) \left[\binom{n+\lambda-1}{k} - \binom{n+\lambda-1}{k-1} \right] \\ &= \sum_k C_{n-2k}^\lambda(x) \binom{n+\lambda-1}{k} \frac{n+\lambda-2k}{n+\lambda-k}. \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \Rightarrow x^n = 2^{-n} n! \sum_k \frac{n+\lambda-2k}{k! (\lambda)^{(n+1-k)}} C_{n-2k}^\lambda(x).$$

Ein einfacheres Beispiel sind die *Laguerrepolynome*

$$(4.9) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} (-x)^k$$

mit der erzeugenden Funktion

$$(4.10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n = (1-t)^{-1-\alpha} e^{\frac{tx}{t-1}}.$$

Man könnte hier analog vorgehen. Diese Rechnung haben wir im Wesentlichen aber schon durchgeführt: Ein Blick auf Beispiel 1 zeigt sofort

$$(4.11) \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} L_k^{(\alpha)}(x).$$

Auf dieselbe Weise lassen sich die meisten Inversionen der bekannten speziellen Polynome herleiten.

5. Folgen von Binomialtyp. Betrachten wir für eine f.P.R. $g(z) = z/\varphi(z)$ mit $\varphi(z) \neq 0$ die Entwicklung

$$(5.1) \quad e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} g(z)^n.$$

Dann ist offensichtlich $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n in x und $p_n(0) = \delta_{n0}$. Aus $e^{(x+y)z} = e^{xz} \cdot e^{yz}$ folgt

$$(5.2) \quad p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

d.h. (p_n) ist eine *Folge von Binomialtyp* (siehe [33]).

Bezeichnen wir mit D den Differentiationsoperator nach x und wenden diesen auf (5.1) an, so folgt

$$ze^{xz} = \sum_n \frac{Dp_n(x)}{n!} g(z)^n,$$

und durch Iteration erhält man

$$g(z)e^{xz} = \sum_n \frac{g(D)p_n(x)}{n!} g(z)^n.$$

Nach Division durch $g(z)$ erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (5.1)

$$(5.3) \quad g(D)p_n(x) = np_{n-1}(x).$$

Außerdem sieht man leicht, daß diese Relation gemeinsam mit den Anfangswerten $p_n(0) = \delta_{n0}$ die Polynome $p_n(x)$ charakterisiert.

BEISPIEL. Für $g(z) = ze^{-az}$ haben wir in (1.4) als Koeffizienten die Abelpolynome $A_n^{(a)}(x) = x(x+an)^{n-1}$ erhalten. Diese erfüllen daher (5.2), und (5.3) besagt

$$De^{-aD}A_n^{(a)}(x) = DA_n^{(a)}(x-a) = nA_{n-1}^{(a)}(x).$$

Aus der Entwicklung (5.1) erhält man durch Anwendung der Lagrangeformel:

$$(I) \Rightarrow \frac{p_n(x)}{n!} = \frac{1}{n} x e^{xt} \varphi(t)^n \Big|_{t^{n-1}} = \frac{x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1}}{n!},$$

da $a(D) \frac{x^n}{n!} = a(t) e^{xt} \Big|_{t^n}$ für beliebige f.P.R. $a(t)$. Also

$$(5.4) \quad p_n(x) = x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1}.$$

(II) $\Rightarrow p_n(x) = n! e^{xt} g'(t) \varphi(t)^{n+1} \Big|_{t^n}$, also

$$(5.5) \quad p_n(x) = g'(D) \varphi(D)^{n+1} x^n.$$

Diese beiden wichtigen Formeln (5.4) und (5.5), die „closed forms“ aus [33, p. 695], sind also unmittelbare Folgerungen aus der Lagrangeschen Inversionsformel.

Umgekehrt läßt sich aus ihnen (I) und (II) herleiten (siehe [5, 13, 32]): Dazu faßt man die Entwicklung (1.1) als linearen Operator auf dem Raum der Polynome auf:

$$f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g(D)^k.$$

Wendet man diesen Operator auf die Polynome $p_n(x)$ an, so gilt wegen (5.3)

$$Lf(D)p_n = \sum_k c_k Lg(D)^k p_n = c_n \cdot n!,$$

wenn $Lp(x) = p(0)$ die Auswertung im Nullpunkt bezeichnet. Setzt man nun für $p_n(x)$ (5.4) und (5.5) ein, erhält man

$$n! c_n = Lf(D)x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1} = Lf'(D)\varphi(D)^n x^{n-1} = (n-1)! f'(z)\varphi(z)^n \Big|_{z^{n-1}}$$

beziehungsweise

$$n! c_n = Lf(D)g'(D)\varphi(D)^{n+1}x^n = n! f(z)g(z)\varphi(z)^{n+1} \Big|_{z^n}.$$

Dabei wurden nur die trivialen Formeln

$$f(D)x - xf(D) = f'(D) \quad \text{und} \quad Lf(D)x^n = n! f(z) \Big|_{z^n}$$

verwendet.

Die Folgen vom Binomialtypen lassen sich natürlich aufs Mehrdimensionale verallgemeinern und das entsprechende Analogon von (5.5) liefert dann die Lagrange-Good-Formel (3.2). Siehe dazu [5, 20, 24] und [2] für den Fall nichtkommutierender Variable.

Weitere Beispiele für Folgen von Binomialtyp sind die oberen und unteren Faktoriellen $(x)^{(n)} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ und $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, die Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ aus (4.9) für $\alpha = -1$ und die Gouldpolynome $G_n(x, b)$ aus (1.7).

Eine geringfügige Verallgemeinerung sind die *Shefferpolynome*. Sie entstehen als Koeffizienten in einer Entwicklung

$$(5.6) \quad f(z)e^{xz} = \sum_n \frac{s_n(x)}{n!} g(z)^n$$

und haben ganz ähnliche Eigenschaften wie die $p_n(x)$. Die wichtigsten Beispiele sind die Hermitepolynome und Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ (für jedes α).

Mit der Lagrangeschen Inversionsformel läßt sich (5.6) verallgemeinern zu

$$(5.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x+ny)}{n!} (g(z)e^{-yz})^n = f(z)e^{xz} \left(1 - y \frac{g(z)}{g'(z)}\right)^{-1}.$$

Zum Beweis braucht man bloß in (II) einsetzen und erhält als Koeffizienten

$$\frac{e^{(x+yn)z} f(z) g'(z)}{g(z)^{n+1}} \Big|_{z^n}.$$

(II) auf (5.6) angewendet zeigt dann, daß dieser Ausdruck gleich $s_n(x+nx)/n!$ ist.

Seien jetzt $s_n(x)$ durch (5.6) gegeben und eine Folge $p_n(x)$ vom Binomialtyp durch $\sum_n p_n(x)/n! h(z)^n = e^{xz}$. Wenn wir nun die $p_n(x)$ nach den $s_k(x)$ entwickeln und umgekehrt, erhalten wir ein Paar inverser Relationen:

$$(5.8) \quad \frac{p_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \frac{s_k(x)}{k!} \quad \text{und} \quad \frac{s_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^n \beta_{nk} \frac{p_k(x)}{k!}.$$

Rota [33] hat mit diesem Ansatz einen eleganteren und einheitlicheren Zugang zu Riordans inversen Relationen von Gould- und Abel-Typ gefunden. Wegen

$$e^{xz} = \sum_n \frac{p_n(x)}{n!} h(z)^n = \sum_k \frac{s_k(x)}{k!} \sum_n \alpha_{nk} h(z)^n,$$

folgt durch Koeffizientenvergleich mit (5.6)

$$f(z)^{-1} g(z)^k = \sum_n \alpha_{nk} h(z)^n,$$

und analog

$$f(z) h(z)^k = \sum_n \beta_{nk} g(z)^n.$$

Die inversen Relationen (5.8), die als Zusammenhangskoeffizienten zwischen zwei Shefferpolynomen auftreten, sind also dieselben, die man mit Egoritschews Methode erhält. Insbesondere lassen sich daher *alle* inversen Relationen von Riordan aus dem umbralen Kalkül herleiten (obwohl das in [33, Problem 1] für die Legendre und Tschebischeff-Typen bestritten wird).

6. Garsias q -Analogon. L. Carlitz [3] gab 1973 folgendes schöne q -Analogon der Lagrangeformeln im Spezialfall $\varphi(z) = 1 - z$ an:

$$(6.1) \quad f(z) = \sum_n c_n \frac{z^n}{(1-z)(1-qz) \cdots (1-q^{n-1}z)}$$

mit

$$(6.2) \quad \begin{aligned} c_n &= \frac{1}{[n]} f'(z)(1-z)(1-qz) \cdots (1-q^{n-1}z) \Big|_{z^{n-1}} \\ &= f(z)(1-z)(1-qz) \cdots (1-q^{n-2}z) \Big|_{z^n}. \end{aligned}$$

(Hier steht $[n]$ für $(q^n - 1)/(q - 1) = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, $f'(z)$ bezeichnet die q -Ableitung $(f(qz) - f(z))/(q - 1)z$. Siehe [8].)

Dieses überaus schöne Beispiel war der Anlaß für eine intensive Suche nach einem q -Analogon der Lagrangeschen Inversionsformel. Heute kennt man zwei verschiedenartige Theorien, die außer Carlitz's Beispiel wenig Gemeinsames haben. Der naheliegende und zunächst (von Andrews [1], Gessel [16], Garsia und Joni [12, 14]) untersuchte Ansatz in der Form

$$(6.3) \quad f(z) = \sum_k c_k g(z)g(qz) \cdots g(q^{k-1}z)$$

ist in formaler Hinsicht äußerst befriedigend, die meisten interessantesten Dinge in dieser Theorie haben im klassischen Fall $q = 1$ aber kein Gegenstück.

Die andere Richtung (siehe [7, 18, 20, 22, 25]) leistet wahrscheinlich eher das, was man sich anfangs erhofft hat: neue q -Analoge für die Dinge zu liefern, die man mit der klassischen Lagrangeformel behandeln kann, etwa q -Analoge der inversen Relationen, Zusammenhänge mit den bekannten q -Analoge der speziellen Polynome, etc.

Wenden wir uns zunächst dem Ansatz (6.3) zu. Diese Form der „ q -Potenzen“ von $g(z)$ hat folgende erstaunliche Eigenschaft:

Satz. *Es gibt zu jeder f.P.R. $g(z)$ (der Ordnung 1) eine f.P.R. $G(z)$, sodaß gilt:*

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \sum_k a_k z^k &= \sum_k b_k g(z)g(qz) \cdots g(q^{n-1}z) \\ \Leftrightarrow \sum_k a_k G(z)G(z/q) \cdots G(z/q^{k-1}) &= \sum_k b_k z^k. \end{aligned}$$

$G(z)$ nennen wir die q -Inverse von $g(z)$. g ist dann die $\frac{1}{q}$ -Inverse von G .

BEWEIS. Sei

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n \geq 1} G_n g(z)g(qz) \cdots g(q^{n-1}z) \quad \Rightarrow \quad G(z) := \sum_{n \geq 1} G_n z^n. \\ \Rightarrow z^2 &= \sum_k G_k g(z)g(qz) \cdots g(q^{k-1}z) q^{-k} \cdot q^k z \\ &= \sum_k q^{-k} G_k g(z) \cdots g(q^{k-1}z) \cdot \sum_l G_l g(q^k z) \cdots g(q^{k+l-1}z) \\ &= \sum_n \left(\sum_k q^{-k} G_k G_{n-k} \right) g(z) \cdots g(q^{n-1}z) \end{aligned}$$

und

$$\sum_n \left(\sum_k q^{-k} G_k G_{n-k} \right) z^n = \sum_k q^{-k} G_k z^k \cdot \sum_l G_l z^l = G(z) \cdot G(z/q),$$

usw.

Um für die Entwicklung (6.3) eine Lagrangeformel zu finden, brauchen wir eine entsprechende Verallgemeinerung von Lemma 1.

Lemma 3. *Es gibt (genau) eine f.P.R. $g^0(z)$, so daß*

$$(6.5) \quad M \left(\frac{g^0(z) dz}{g(z)g(z/q) \cdots g(z/q^n)} \right) = \delta_{n0}.$$

Dieses $g^0(z)$ muß also ein q -Analogon der Ableitung $g'(z)$ sein, es ist aber *nicht* die übliche q -Ableitung. Wir werden zwar einige Formeln für dieses $g^0(z)$ herleiten, konkret ausrechnen läßt es sich aber anscheinend nur in Carlitz's Beispiel.

BEWEIS. Schreiben wir $g(z) = z/\varphi(z)$, so wird (6.5) zu

$$(6.6) \quad g^0(z) \varphi(z) \varphi(z/q) \cdots \varphi(z/q^n) \Big|_{z^n} = \delta_{n0}.$$

Setzt man jetzt $g^0(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$ unbestimmt an, dann kann man daraus sukzessive die γ_n berechnen.

Kehren wir jetzt zur Entwicklung (6.3) zurück. Wir dividieren durch $g(z) \cdots g(q^n z)$ und ersetzen z durch z/q^n :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(z/q^n)}{g(z)g(z/q) \cdots g(z/q^n)} &= \frac{c_0}{g(z) \cdots g(z/q^n)} + \frac{c_1}{g(z) \cdots g(z/q^{n-1})} + \cdots \\ &+ \frac{c_n}{g(z)} + c_{n+1} + c_{n+2} g(qz) + \cdots \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $g^0(z)$ folgt aus Lemma 3

$$(6.7) \quad c_n = M \left(\frac{f(z/q^n) g^0(z) dz}{g(z)g(z/q) \cdots g(z/q^n)} \right) = q^n M \left(\frac{f(z) g^0(q^n z) dz}{g(z)g(qz) \cdots g(q^n z)} \right)$$

oder

$$(6.8) \quad c_n = q^{-\binom{n}{2}} f(z) g^0(q^n z) \varphi(z) \cdots \varphi(q^n z) \Big|_{z^n}.$$

Das ist Garsias q -Analogon der 2. Version der Lagrangeschen Inversionsformel. Andrews [1] hat ein q -Analogon der 1. Version angegeben, das allerdings viel komplizierter ist, er stellt c_n nämlich als $(n+1) \times (n+1)$ -Determinante dar.

Wir wollen noch zwei Formeln für $g^0(z)$ herleiten: Für $q = 1$ gilt für die Koeffizienten γ_n von $g^0(z) = \sum_n \gamma_n z^n$

$$\gamma_n = g'(z) \Big|_{z^n} = M \left(\frac{g'(z) dz}{z^{n+1}} \right) = M \left(\frac{dz}{G(z)^{n+1}} \right)$$

nach der Substitutionsformel (3.3), wenn $G(z)$ die zu $g(z)$ inverse Potenzreihe ist. Dafür lautet das q -Analogon:

$$(6.9) \quad \gamma_n = M \left(\frac{dz}{G(z)G(z/q) \cdots G(z/q^n)} \right).$$

BEWEIS. Ein Blick auf (6.4) zeigt, daß wir den Koeffizienten b_n jetzt auf zwei Arten berechnen können. Das ergibt für beliebige b_n die Gleichung

$$(6.10) \quad q^n M \left(\frac{g^0(q^n z) \sum_k a_k z^k}{g(z) \cdots g(q^n z)} dz \right) = M \left(\frac{\sum_k a_k G(z) \cdots G(z/q^{k-1})}{z^{n+1}} dz \right),$$

ein q -Analogon der Substitutionsformel (3.3).

Setzen wir jetzt $\sum_k a_k z^k = g(z) \cdots g(q^n z) z^{-n-1}$, so folgt wegen (6.4)

$$\begin{aligned} g(z) \cdots g(q^n z) &= \sum_k a_k z^{k+n+1} \\ \Rightarrow z^{n+1} &= \sum_k a_k G(z) \cdots G(z/q^{k+n}) \\ \Rightarrow \frac{z^{n+1} q^{(n+1)^2}}{G(qz) \cdots G(q^{n+1}z)} &= \sum_k a_k G(z) G(z/q) \cdots G(z/q^{k-1}). \end{aligned}$$

In (6.10) eingesetzt erhalten wir

$$q^n M \left(\frac{g^0(q^n z)}{z^{n+1}} dz \right) = q^{(n+1)^2} M \left(\frac{dz}{G(qz) \cdots G(q^{n+1}z)} \right)$$

also

$$\gamma_n = M \left(\frac{dz}{G(z)G(z/q) \cdots G(z/q^n)} \right).$$

Für die zweite Formel brauchen wir noch etwas Notation, nämlich Garsias „roofing“ und „starring“: Für f.P.R. $f(z) = \sum_k a_k z^k$ sei

$$\hat{f}(z) = \sum_k a_k q^{-\binom{k}{2}} z^k$$

und, falls $a_0 = 1$,

$$f^*(z) = f(z)f(qz)f(q^2z) \cdots .$$

Dieses unendliche Produkt konvergiert für $|q| < 1$ oder formal, wenn man $f^*(z)$ als f.P.R. mit rationalen Funktionen in q als Koeffizienten auffaßt. Dieses $f^*(z)$ ist auch die einzige f.P.R. mit $f^*(0) = 1$ und

$$f(z) \cdot f^*(qz) = f^*(z).$$

Es gilt dann für $g(z) = z/\varphi(z)$ und $\varphi(0) = 1$

$$(6.11) \quad g^0(z) = \varphi^*(qz) \cdot \left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z/q)} \right)^\wedge.$$

BEWEIS. Setzen wir $g^0(z) = \varphi^*(qz) \cdot \hat{\psi}(z)$ an. Dann wird (6.6) zu

$$\varphi^*(z/q^n) \hat{\psi}(z)|_{z^n} = \delta_{n0}.$$

Durch Einsetzen von $\varphi^*(z) = \sum_n \varphi_n z^n$ und $\psi(z) = \sum_n \psi_n z^n$ sieht man erstaunt ein, daß diese Gleichung äquivalent ist mit

$$\hat{\varphi}^*(z/q) \cdot \psi(z)|_{z^n} = \delta_{n0},$$

woraus schließlich $\hat{\varphi}^*(z/q) \cdot \psi(z) = 1$ folgt.

In [12] findet man noch eine Fülle solcher eigenartiger Identitäten mit $*$ und \wedge , die wahrscheinlich das Reizvollste an dieser Theorie sind, für $q = 1$ aber ihren Sinn verlieren.

Leider kann man all diese Formeln für $g^0(z)$ anscheinend nur in einem Fall konkret verwerten, nämlich für $\varphi(z) = 1 - z$, also Carlitz's Beispiel: Es ist dann

$$\varphi^*(z) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)},$$

daher

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^*(z) &= \sum_n \frac{(-z)^n}{(1-q) \cdots (1-q^n)}, & \frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)} &= \sum_n \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q) \cdots (1-q^n)} \\ \left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)} \right)^\wedge &= \sum_n \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q) \cdots (1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i z)^{-1} = \frac{1}{\varphi^*(z)}, \\ \Rightarrow g^0(z) &= \varphi^*(qz) \cdot \varphi^*(z/q)^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1-z/q)}, \end{aligned}$$

sodaß (6.8) in diesem Fall wirklich (6.2) liefert.

Man kann auch ein q -Analogon der Folgen von Binomialtyp studieren: Ausgehend von

$$e^{xz} = \sum_n \frac{p_n(x)}{n!} g(z) g(qz) \cdots g(q^{n-1}z)$$

lassen sich genauso wie in Kap. 5 die folgenden Formeln herleiten:

$$p_n(x+y) = \sum_k \binom{n}{k} p_n(x) p_{n-k}(y/q^k)$$

$\varepsilon g(D)p_n = np_{n-1}$, wobei D der gewöhnliche Differentiationsoperator und $\varepsilon f(x) = f(qx)$ ist,

$$p_n(x) = q^{-\binom{n}{2}} g^0(q^n D) \varphi(D) \cdots \varphi(q^n D) x^{n-1}.$$

7. Ein allgemeiner Ansatz, weitere q -Analoge. Wir wollen uns jetzt mit allgemeineren Entwicklungen

$$(7.1) \quad f(z) = \sum_k c_k g_k(z)$$

beschäftigen, wo $g_k(z)$ eine f.L.R. der Ordnung k ist (die *Ordnung* einer formalen Laurentreihe ist wie bei formalen Potenzreihen definiert, siehe Lemma 1), und versuchen, hier die Koeffizienten c_k zu berechnen.

Dazu müßte man f.L.R. $G_n(z)$ der Ordnung $-n$ finden, sodaß etwa

$$(7.2) \quad L g_k(z) G_n(z) = \delta_{nk}$$

für alle ganzen Zahlen n, k gilt. Dabei sei L das lineare Funktional

$$L f(z) = f(z)|_{z^0} = M \left(\frac{f(z)}{z} dz \right).$$

Dann würde für den Koeffizienten c_n aus (7.1) nämlich gelten:

$$(7.3) \quad c_n = L f(z) G_n(z).$$

Für $g_k(z) = g(z)^k$ beispielsweise ist wegen Lemma 1

$$(7.4) \quad G_n(z) = \frac{z g'(z)}{g(z)^{n+1}}.$$

Es stellt sich daher das Problem, ob man die $G_n(z)$ auch für allgemeinere $g_k(z)$ explizit angeben kann. Mit der folgenden Methode gelingt das in einigen wichtigen Fällen.

Nehmen wir an, daß unsere Folge $g_n(z)$ die Eigenvektoren eines Operators sind, beziehungsweise seien allgemeiner U, V zwei lineare Operatoren auf dem Raum der f.L.R., und es gelte für irgendwelche reellen Zahlen c_n :

$$(7.5) \quad U g_n = c_n V g_n.$$

$\langle a(z), b(z) \rangle = L a(z) b(z)$ ist ein inneres Produkt auf den f.L.R.

Ist V bijektiv, dann gibt es eindeutig bestimmte f.L.R. $\tilde{g}_k(z)$ der Ordnung $-k$, die zu den $V g_n(z)$ biorthogonal sind:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \langle \tilde{g}_k, V g_n \rangle &= \delta_{nk} \\ \Rightarrow \langle \tilde{g}_k, U g_n \rangle &= c_n \langle \tilde{g}_k, V g_n \rangle c_n \delta_{nk} = c_k \delta_{nk}. \\ \Rightarrow \langle U^* \tilde{g}_k, g_n \rangle &= c_k \langle V^* g_k, g_n \rangle \end{aligned}$$

also:

$$(7.7) \quad U^* \tilde{g}_k = c_k V^* \tilde{g}_k \quad \text{und}$$

$$(7.8) \quad G_k = V^* \tilde{g}_k \quad \text{erfüllt} \quad \langle G_k, g_n \rangle = \delta_{nk}.$$

Die Methode besteht also darin, zunächst Hilfsfunktionen $\tilde{g}_k(z)$ zu berechnen, die ein ähnliches Eigenwertsproblem wie die $g_n(z)$ (nur für die adjungierten Operatoren) erfüllen, und daraus kann man dann die gesuchten G_n konstruieren.

Beispiele für Operatoren.

- (1) $\varepsilon_q f(x) = f(qx) \Rightarrow \varepsilon_q^* f(x) = f\left(\frac{x}{q}\right).$
- (2) Multiplikationsoperator $Uf(x) = a(x)f(x): U = U^*.$
- (3) $Uf(x) = xf'(x) \Rightarrow U^* f(x) = -xf'(x).$

Jetzt können wir an Hand der klassischen Lagrangeformel zeigen, daß diese Methode überhaupt funktioniert: Die Potenzen $g_n(z) = g(z)^n$ erfüllen bekanntlich

$$g'_n(z) = ng_n(z) \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Das ist eine Gleichung der Form (7.5), wenn wir z.B. $U = xD$, $V = xg'(x)/g(x)$ und $c_n = n$ wählen. Die $\tilde{g}_k(x)$ erfüllen daher nach (7.7)

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_k(x) &= -k\tilde{g}_k(x) \frac{g'}{g} \quad \text{d.h.} \\ \tilde{g}_k(x) &= g(x)^{-k} \quad \text{und} \\ G_k(x) &= V^* \tilde{g}_k = x \frac{g'(x)}{g(x)^{k+1}}, \quad \text{also genau (7.4).} \end{aligned}$$

Ergoritschews Ansatz für inverse Relationen läßt sich natürlich leicht auf diese allgemeine Situation übertragen: Betrachten wir neben (g_n) noch eine zweite Folge (h_n) mit

$$Lh_n H_k = \delta_{nk},$$

dann ist

$$(7.9) \quad \alpha_{nk} = Lf(x)g_k(x)H_n(x) \quad \beta_{nk} = Lf(x)^{-1}h_k(x)G_n(x)$$

ein Paar inverser Relationen, wie man aus den beiden Entwicklungen

$$\begin{aligned} f(x)g_k(x) &= \sum_n \alpha_{nk} h_n(x) \quad \text{und} \\ f(x)^{-1}h_k(x) &= \sum_n \beta_{nk} g_n(x) \end{aligned}$$

unmittelbar entnimmt.

Krattenthalers q -Analogon. Seien φ_n, ψ_n zwei Folgen f.P.R. mit

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \varphi'_n &= [n]\varphi_n(x)\varphi(x) \quad (' \text{ ist jetzt die } q\text{-Ableitung}) \\ \psi'_n &= q^{-n}[n]\psi_n(qx)\psi(x), \end{aligned}$$

und sei

$$(7.11) \quad g_n(x) = \frac{x^n}{\varphi_n(x)\psi_n(x)}.$$

Für die Entwicklung (7.1) nach solchen „ q -Potenzen“ $g_n(x)$ konnte Krattenthaler [25, 26] folgende q -Lagrangeformel zeigen:

$$(7.12) \quad c_n = \frac{1}{[n]} f'(x) \varphi_n(x) \psi_n(qx) \Big|_{x^{n-1}}$$

$$(7.13) \quad = f(x) \varphi_n\left(\frac{x}{q}\right) \psi_n(qx) \left(1 - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) - x\psi(x)\right) \Big|_{x^n}.$$

Zum Beweis schreiben wir (7.10) um in

$$\begin{aligned} \varphi_n(qx) &= \varphi_n(x)(1 + (q^n - 1)x\varphi(x)) \\ \psi_n(x) &= \psi_n(qx)(1 + (q^{-n} - 1)x\psi(x)). \\ \Rightarrow \frac{g_n(qx)}{g_n(x)} &= \frac{q^n + (1 - q^n)x\psi(x)}{1 + (q^n - 1)x\varphi(x)} \end{aligned}$$

$$(7.14) \Rightarrow g_n(qx)(1 - x\varphi(x)) - x\psi(x)g_n(x) = q^n [g_n(x)(1 - x\psi(x)) - x\varphi(x)g_n(qx)].$$

Diese Gleichung ist genau eine Eigenwertgleichung der Form (7.5). Es folgt daher

$$\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right) \left(1 - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right)\right) - x\psi(x)\tilde{g}_n(x) = q^n \left[\tilde{g}_n(x)(1 - x\psi(x)) - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) \tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right)\right].$$

Aus dieser q -Differenzgleichung für $\tilde{g}_n(x)$ ergibt sich

$$\frac{\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right)}{\tilde{g}_n(x)} = \frac{q^n + (1 - q^n)x\psi(x)}{1 + (q^n - 1)\frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)} = q^n \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(qx)} \frac{\varphi_n(x/q)}{\varphi_n(x)},$$

$$(7.15) \quad \Rightarrow \tilde{g}_n(x) = \frac{\varphi_n(x)\psi_n(qx)}{x^n}.$$

Die zu $g_n(x)$ orthogonalen $G_n(x)$ errechnen sich nach (7.8) zu

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (1 - x\psi(x))\tilde{g}_n(x) - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) \tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right) \\ &= x^{-n} \varphi_n\left(\frac{x}{q}\right) \psi_n(qx) \left\{ (1 - x\psi(x)) \left(1 + (q^n - 1)\frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) (q^n + (1 - q^n)x\psi(x)) \right\} \\ &= x^{-n} \varphi_n\left(\frac{x}{q}\right) \psi_n(qx) \left(1 - \frac{x}{q} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) - x\psi(x)\right). \end{aligned}$$

Das liefert wegen $c_n = Lf(x)G_n(x)$ das q -Analogon der 2. Version (7.13).

Die 1. Version erhält man aus der Beobachtung

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \left(\frac{x^n}{\psi_n(x)} \right)' \frac{1}{\varphi_n(x)} + \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \right)' \\ &= \frac{[n]x^{n-1}}{\psi_n(x)} (1 - x\psi(x)) \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \frac{[n]\varphi(x)}{\varphi_n(qx)} \\ &= \frac{[n]}{x} \{g_n(x)(1 - x\psi(x)) - x\varphi(x)g_n(qx)\} = \frac{[n]}{x} Vg_n. \end{aligned}$$

Wegen (7.6) folgt daher

$$Lg'_n(x) \frac{\tilde{g}_k(x)}{x} = [n]\delta_{nk},$$

und somit

$$c_n = \frac{1}{[n]} f'(x) \varphi_n(x) \psi_n(qx) \Big|_{x^{n-1}}.$$

Der ursprüngliche Beweis von Krattenthaler ist etwas eleganter: Er erhält die Orthogonalitätsrelationen direkt durch Ableiten des Quotienten g_k/g_n . Für einen weiteren Beweis mit Hilfe von Polynomen (analog zu Kap. 5) siehe [21].

Die Schwierigkeit bei diesem q -Analogon ist es, konkrete Beispiele für Folgen φ_n beziehungsweise ψ_n mit (7.10) zu finden. Das derzeit allgemeinste bekannte Beispiel ist

$$\varphi_n(x) = e_r((a[n] + b)x^r) / e_r(bx^r),$$

wobei $e_r(x)$ die q^r -Exponentialfunktion ist (siehe [8, § 1.2]). $\psi_n(x)$ erhält man daraus, indem man entweder n durch $-n$ oder q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt. Für die Anwendungen reicht das aber vollkommen aus.

Die wichtigsten Spezialfälle von Krattenthalers q -Lagrangeformel sind:

(1) $\varphi_n(z) = (1 - az)(1 - qaz) \cdots (1 - q^{n-1}az)$, $\psi_n \equiv 1$.

Das ist wieder Carlitz's Beispiel (6.1). Wegen $\varphi'_n(z) = -[n]\varphi_n(z) \frac{a}{1-az}$ folgt aus (7.12) und (7.13) sofort (6.2).

Betrachtet man eine zu (5.1) analoge Entwicklung, erhält man als Koeffizienten die q -Laguerrepolynome (siehe [6, 14]). Außerdem liefert es folgendes q -Analogon der inversen Relation (Kap. 4, Bsp. 1):

$$\alpha_{nk} = \begin{bmatrix} n+p \\ n+k \end{bmatrix}, \quad \beta_{nk} = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+p \\ n-k \end{bmatrix}.$$

(2) $\varphi_n(z) = e(a[n]z)$, $\psi_n \equiv 1$ (Jackson [22], Cigler [7]).

Damit läßt sich analog zu (Kap. 1, Bsp. 2) Jacksons q -Analogon der Abelidentität herleiten, es liefert die „richtigen“ q -Analoge der Abelpolynome [7] und der inversen Relationen von Abeltyp, z.B.

$$\alpha_{nk} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p]^{n-k}, \quad \beta_{nk} = q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p][k+p]^{n-k-1}.$$

(3) $\varphi(z) = (1 - az)(1 - qaz) \cdots (1 - q^{n-1}az)$, $\psi_n(z) = (1 - z/q)(1 - z/q^2) \cdots (1 - z/q^n)$.

Dieses Beispiel hängt eng mit den q -Jacobi- und q -Gegenbauerpolynomen zusammen. Gessel und Stanton [18] wenden es auf Transformationen hypergeometrischer Reihen an. Krattenthaler [25, 26] konnte damit überzeugende q -Analoge der inversen Relationen von Legendre- und Chebyshevtyp herleiten, etwa (vergleiche Kap. 4, Bsp. 3).

$$a_n = \sum_k \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} b_{n-2k} \Leftrightarrow b_n = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+p-k \\ k \end{bmatrix} \frac{[n+p]}{[n+p-k]} a_{n-2k}.$$

Schließlich führt es — ausgehend von (2.5) — zu einem q -Analogon der Catalanzahlen (siehe Kap. 8).

Das q -Analogon von Gessel–Stanton. In [18] geben Gessel und Stanton ein q -Analogon der Lagrangeformel für den Spezialfall $g(x) = x(1+x)^{-b-1}$ an, das außer in Spezialfällen anscheinend nicht in Krattenthalers Ansatz (7.11) enthalten ist. Im Wesentlichen bringen sie ein q -Analogon der inversen Relation von Gouldtyp (Kap. 4, Bsp. 2). Sie betrachten (in etwas anderer Notation): $g_k(x) = \sum_n \alpha_{nk} x^n$ mit

$$(7.16) \quad \alpha_{nk} = q^{-b(n-k)k} \frac{[a+bk-k]^{(n-k)}}{[n-k]_b!}.$$

Dabei sei $[a]^{(n)} = [a][a+1] \cdots [a+n-1]$,

$$[a]_b = \frac{q^{ab} - 1}{q^b - 1} = \frac{[ab]}{[b]}.$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$g_k(x)(1 - q^{-kb}[b]x) = q^{-kb}g_k(q^b x) - xq^a [b] g_k(qx)$$

gilt, was wieder als Eigenwertgleichung

$$(7.17) \quad g_k(q^b x) + [b]x g_k(x) = q^{bk}(g_k(x) + xq^a [b] g_k(qx))$$

geschrieben werden kann.

$$\Rightarrow \tilde{g}_n(q^{-b}x) + [b]x\tilde{g}_n(x) = q^{bn} \left(\tilde{g}_n(x) + \frac{x}{q} q^a [b] \tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right) \right).$$

Setzt man $\tilde{g}_n(x) = \sum_{k \leq n} \gamma_{nk} x^{-k}$, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} q^{bk} \gamma_{nk} + [b] \gamma_{n,k+1} &= q^{bn} (\gamma_{nk} + q^{a-1} [b] q^{k+1} \gamma_{n,k+1}) \\ \Rightarrow \frac{\gamma_{nk}}{\gamma_{n,k+1}} &= [b] \frac{q^{a+bn+k} - 1}{q^{bk} - q^{bn}} = -q^{-kb} \frac{[a+bn+k]}{[n-k]_b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma_{nk} = \gamma_{nn} q^{b\binom{k}{2} - b\binom{n}{2}} \frac{[a + bn + k]^{(n-k)}}{[n - k]_b!} (-1)^{n-k}.$$

Schließlich ist

$$G_n(x) = \tilde{g}_n(x) + xq^{a-1} [b] \tilde{g}_n(x/q).$$

Setzt man $G_n(x) = \sum_{k \leq n} \beta_{nk} x^{-k}$, so ist (β_{nk}) wegen

$$\delta_{nk} = Lg_k(x)G_n(x) = L \sum_{j,i} \alpha_{jk} x^j \beta_{ni} x^{-i} = \sum_i \beta_{ni} \alpha_{ik}$$

genau die zu (α_{nk}) inverse Matrix.

Man erhält

$$\begin{aligned} \beta_{nk} &= \gamma_{nk} + q^{a+k} [b] \gamma_{n,k+1} \\ &= q^{b\binom{k}{2} - b\binom{n}{2}} (-1)^{n-k} \frac{[a + bn + k + 1]^{(n-k-1)}}{[n - k]_b!} \\ &\quad \times ([a + bn + k] - [n - k]_b [b] q^{a+k+bk}) \\ (7.18) \quad &= \frac{[a + bn + k + 1]^{(n-k-1)} [a + bk + k]}{[n - k]_b!} q^{b\binom{k}{2} - b\binom{n}{2}} (-1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Wir haben somit zwei zueinander inverse Relationen (7.16) und (7.18). Man kann das Ergebnis aber auch als Lagrangeformel für die $g_k(x) = \sum_n \alpha_{nk} x^n$ auffassen: Für den Koeffizienten c_n in der Entwicklung (7.1) einer Funktion $f(x) = \sum_k f_k x^k$ gilt

$$c_n = Lf(x)G_n(x) = \sum_k \beta_{nk} f_k.$$

8. q -Catalanzahlen. Ausgehend von den Entwicklungen (2.5) und (2.6) für die Catalanzahlen, wollen wir jetzt zwei verschiedene q -Analoge der Catalanzahlen studieren, die den beiden q -Lagrangeformeln von Garsia und Krattenthaler entsprechen.

Carlitz's q -Catalanzahlen. Wir definieren analog zu (2.6) q -Catalanzahlen $C_n = C_n(q)$ durch (siehe [1]):

$$(8.1) \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z)(1-qz) \cdots (1-q^{n-1}z).$$

Aus (6.4) beziehungsweise dessen Beweis folgt dann

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} C_{k-1} C_{l-1} q^{k(l-1)} \right) z^n (1-z) \cdots (1-q^{n-1}z).$$

Andererseits folgt aus (8.1)

$$z = C_0 z(1-z) + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z) \cdots (1-q^{n-1}z),$$

$C_0 = 1$ und eine andere Entwicklung von z^2 , sodaß man durch Koeffizientenvergleich

$$C_{n-1} = \sum_{k+l=n-2} C_k C_l q^{(k+1)l}$$

oder

$$(8.2) \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} q^{(k+1)(n-k)}$$

erhält. Mit $C_n = q^{\binom{n}{2}} \tilde{C}_n$ wird das zu

$$\tilde{C}_{n+1} = \sum_{k=0}^n q^{-k} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k}.$$

Diese q -Catalanzahlen erfüllen im Wesentlichen also das einfachste q -Analogon der klassischen Rekursion (2.1) der Catalanzahlen. Für die ersten Werte erhält man:

$$C_0 = C_1 = 1, C_2 = 1+q, C_3 = 1+q+2q^2+q^3, C_4 = 1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6, \dots$$

Das Analogon von (2.5) führt, wie man sich leicht überlegt, zu denselben q -Catalanzahlen:

$$(8.3) \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n-1}{2}} C_n \frac{z^n}{(1+z)(1+qz) \cdots (1+q^{2n-1}z)}.$$

Eine explizite Formel für die C_n ist allerdings nicht bekannt. Dafür gibt es noch eine schöne kombinatorische Interpretation: Sei \mathcal{C}_n die Menge aller Wörter mit n Nullen und n Einsen, wo jeder Anfangsabschnitt mindestens so viele 0 wie 1 enthält. Diesen Wörtern entsprechen Wege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die nicht unter die x -Achse gehen, wenn man jeder 0 ein ansteigendes, jeder 1 ein absteigendes Wegstück zuordnet. Bekanntlich ist $|\mathcal{C}_n| = C_n$. Für das q -Analogon gilt jetzt:

$$(8.4) \quad C_n = \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\text{inv } w}.$$

Zum Beweis zerlegt man ein Wort $w \in \mathcal{C}_{n+1}$ in der üblichen Weise in

$$w = 0w_11w_2 \text{ mit } w_1 \in \mathcal{C}_k, w_2 \in \mathcal{C}_{n-k}.$$

Für die Anzahl der Inversionen von w gilt dann

$$\text{inv } w = \text{inv } w_1 + \text{inv } w_2 + (k+1)(n-k).$$

Daher erfüllt $\sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\text{inv } w}$ dieselbe Rekursion (8.2) wie die C_n .

Die q -Catalanzahlen $c_n(\lambda)$. Der 3. Spezialfall von Krattenthalers q -Analogon der Lagrangeformel legt es nahe, die Entwicklung (2.5) auch auf folgende Weise zu verallgemeinern:

$$(8.5) \quad z = \sum_n \frac{c_n(\lambda)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{z^n}{(1+z/q^n) \cdots (1+z/q)(1+q^\lambda z) \cdots (1+q^{\lambda+n-1}z)}.$$

Aus (7.12) folgt dann

$$(8.6) \quad \begin{aligned} q^{-\binom{n}{2}} c_n(\lambda) &= \frac{1}{[n]} (1+z/q^{n-1}) \cdots (1+z)(1+q^\lambda z) \cdots (1+q^{\lambda+n-1}z) \Big|_{z^{n-1}} \\ &= \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} (q^{-n+1}z)^k \sum_l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} q^{\binom{l}{2}} (q^\lambda z)^l \Big|_{z^{n-1}} \\ &= \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2} - k(n-1) + \lambda(n-1-k) + \binom{n-1-k}{2}} \binom{n}{n-1-k}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$(8.7) \quad c_n(\lambda) = \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} q^{k^2 + \lambda k}.$$

Die Summanden sind q -Analoge der *Runyonzahlen* $r_{nk} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}$ aus [31, p. 17], sie zählen die Wege von $(0,0)$ bis $(2n,0)$ über der x -Achse mit k „Tälern“.

Für gewisse λ läßt sich (8.6) einfacher berechnen: Für $\lambda = 1$ etwa gilt

$$(8.8) \quad \begin{aligned} c_n(1) &= q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]} (1+z/q^{n-1}) \cdots (1+q^n z) \Big|_{z^{n-1}} \\ &= q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} q^{(-n+1)(n-1) + \binom{n-1}{2}} \\ &= \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also das naheliegendste q -Analogon der Catalanzahlen überhaupt. Für $\lambda = 0$ erhält man auf ähnliche Weise

$$(8.9) \quad c_n(0) = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{1+q}{1+q^n}.$$

Für die ersten Werte gilt

$$c_0(\lambda) = c_1(\lambda) = 1, \quad c_2(\lambda) = 1 + q^{1+\lambda}, \quad c_3(\lambda) = 1 + [3]q^{1+\lambda} + q^{4+2\lambda}, \quad \dots$$

Nun zur kombinatorischen Interpretation. Es gilt:

$$(8.10) \quad c_n(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\text{maj } w + (\lambda-1) \text{ des } w}.$$

Dabei bezeichnet $\text{maj } w$ den *major* (oder *greater*) *index* von w und des w die Anzahl der Abstiege ($= \dots 10 \dots$) in w .

Für den Fall $\lambda = 1$ hat J. Fürlinger den folgenden eleganten Beweis gefunden:

Betrachten wir alle Wege von $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$ kodiert durch 0–1-Wörter w , so gilt bekanntlich (siehe etwa [29]):

$$\sum_w q^{\text{maj } w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Wir ordnen jetzt jedem Weg w , der unter die x -Achse geht, bijektiv einen Weg w' von $(0, 0)$ nach $(2n, 2)$ zu: Dazu bestimmen wir den Punkt P auf dem Weg, der am „tiefsten“ liegt, und falls es mehrere solche gleichtiefe gibt, dann den ersten davon. P' sei der Punkt vor P . Indem wir das unmittelbar vor P gelegene absteigende Wegstück $P'P$ in ein aufsteigendes hinaufklappen und den Rest des Weges (um zwei Einheiten nach oben verschoben) daran anhängen, erhalten wir den Weg w' . Aus w' kann man w wieder zurückgewinnen: Der kritische Punkt P' , an dem das darauffolgende Wegstück wieder hinuntergeklappt werden muß, ist der am weitesten rechts liegende unter den „tiefsten“ Punkten von w' . Offensichtlich ist $\text{maj } w' = \text{maj } w - 1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\text{maj } w} &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - \sum_{w \notin \mathcal{C}_n} q^{\text{maj } w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q \sum_{w'} q^{\text{maj } w'} \\ &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall (λ beliebig) und weitere Eigenschaften der q -Catalanzahlen verweise ich auf [11].

9. Abschließende Bemerkungen. Wie aus dem Umfang des Skriptums ersichtlich, erweist sich das Thema „Lagrange-Inversion“ als unerwartet ergiebig. Die Stoffauswahl ist natürlich sehr subjektiv, die kombinatorische Seite wurde zu Gunsten der analytischen vernachlässigt, die q -Analoge sind sicher nicht zu kurz gekommen. Auf einige wesentliche Aspekte, etwa kombinatorische Beweise, wurde überhaupt nicht eingegangen. Ich verweise hier auf die Literatur, z.B. [4, 27, 30, 34].

Als Quelle habe ich neben der zitierten Literatur in erster Linie eine Vorlesung über „Kombinatorische Identitäten“ benutzt, die Prof. Cigler im WS 1981/82 gehalten hat. Ich hoffe, die Darstellung dadurch insofern bereichert zu haben, daß sie für jeden den einen oder anderen neuen Aspekt enthält.

LITERATUR

- [1] G.E. ANDREWS, *Identities in combinatorics II: A q -analog of the Lagrange inversion theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 240–245.
- [2] G. BARON und P. KIRSCHENHOFER, *Operatorenkalkül über freien Monoiden III: Lagrange-inversion und Sheffersysteme*, Monatsh. Math. **92** (1981), 83–103.
- [3] L. CARITZ, *Some q -expansion formulas*, Glasnik Mat. **8** (1973), 205–214.

- [4] L. CHOTTIN, *Énumération d'arbres et formules d'inversion de séries formelles*, J. Combin. Theory Ser. B **31** (1981), 23–45.
- [5] J. CIGLER, *Sequences of polynomials of binomial type and the Lagrange–Good formula*, Univ. Wien, 1977.
- [6] J. CIGLER, *Operatormethoden für q -Identitäten II: q -Laguerre-Polynome*, Monatsh. Math. **91** (1981), 105–117.
- [7] J. CIGLER, *Operatormethoden für q -Identitäten III: Umbrale Inversionen und die Lagrange'sche Formel*, Arch. Math. **35** (1980), 533–543.
- [8] J. CIGLER, *Elementare q -Identitäten*, Actes de la 5ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, publication de l'I.R.M.A. no 182/S-04, Strasbourg, 1982, pp. 23–58.
- [9] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.
- [10] G. P. EGORITSCHEW, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, “Nauka” Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1977, translated from the Russian: Translations of Mathematical Monographs, 59, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1984.
- [11] J. FÜRLINGER and J. HOFBAUER, *q -Catalan numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **40** (1985), 248–264.
- [12] A. M. GARSIA, *A q -analogue of the Lagrange inversion formula*, Houston J. Math. **7** (1981), 205–237.
- [13] A. M. GARSIA and S. A. JONI, *A new expression for umbral operators and power series inversion*, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), 179–185.
- [14] A. M. GARSIA and S. A. JONI, *Composition sequences*, Comm. Algebra **8** (1980), 1195–1266.
- [15] I. M. GESSEL, *A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration*, J. Combin. Theory Ser. A **28** (1980), 321–337.
- [16] I. GESSEL, *A noncommutative generalization and a q -analog of the Lagrange inversion formula*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), 455–482.
- [17] I. GESSEL and D. STANTON, *Strange evaluations of hypergeometric series*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 295–308.
- [18] I. GESSEL and D. STANTON, *Application of q -Lagrange inversion to basic hypergeometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 173–203.
- [19] I. J. GOOD, *Generalization to several variables of Lagrange's expansion, with application to stochastic processes*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **56** (1960), 367–380.
- [20] J. HOFBAUER, *A short proof of the Lagrange–Good formula*, Discrete Math. **25** (1979), 135–139.
- [21] J. HOFBAUER, *A q -analog of the Lagrange expansion*, Arch. Math. **42** (1984), 536–544.
- [22] F. H. JACKSON, *A q -generalization of Abel's series*, Rendiconti Palermo **29** (1910), 340–346.
- [23] C. JACOBI, *De resolutione aequationum per series infinitas*, J. Reine Angew. Math. **6** (1830), 257–286.
- [24] S. A. JONI, *Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators*, Linear and Multilinear Algebra **6** (1978), 111–122.
- [25] Ch. KRATTENTHALER, *A new q -Lagrange formula and some applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 338–344.
- [26] Ch. Krattenthaler, *Lagrangeformel und inverse Relationen*, Ph. Doct. Thesis, University of Vienna, 1983.
- [27] G. LABELLE, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules inversion de Lagrange*, Advances in Math. **42** (1981), 217–247.
- [28] J. L. LAGRANGE, *Nouvelles méthodes pour résoudre les équations littérales par le moyens de séries*, (1770) Oeuvres, vol. 3, Gauthier–Villars, Paris, 1869, pp. 1–73.
- [29] P. A. MAC MAHON, *Collected Papers: Combinatorics*, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [30] G. N. RANEY, *Functional composition patterns and power series reversion*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 441–451.
- [31] J. RIORDAN, *J. Wiley*, New York, 1968.
- [32] St. ROMAN and G. C. ROTA, *The umbral calculus*, Advances in Math. **27** (1978), 95–188.

- [33] G. C. ROTA, D. KAHANER and A. ODLYZKO, *Finite operator calculus*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973), 685–760.
- [34] W. T. TUTTE, *On elementary calculus and the Good formula*, J. Combin. Theory Ser. B **18** (1975), 97–137.