

# **Kern- und Teilchenphysik**

## **(für das Lehramt)**

SS 2009

Gerhard Ecker

Fakultät für Physik  
Universität Wien

# Inhaltsverzeichnis

Lehrbücher . . . . .	2
I Einleitung . . . . .	3
II Leptonen und Quarks: Bausteine der Materie . . . . .	6
III Fundamentale Wechselwirkungen . . . . .	12
III.1 Elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .	12
III.2 Gravitation . . . . .	14
III.3 Schwache Wechselwirkung . . . . .	15
III.4 Starke Wechselwirkung . . . . .	17
III.5 Austauschquanten und Materieteilchen . . . . .	19
IV Von der Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie . . . . .	20
IV.1 Quantenmechanik . . . . .	20
IV.2 Warum QFT . . . . .	21
IV.3 Feldquantisierung . . . . .	22
IV.4 Relativistische Quantenmechanik . . . . .	26
IV.5 QED . . . . .	29
V Symmetrien . . . . .	36
V.1 Klassische Mechanik und Quantenmechanik . . . . .	36
V.2 Klassische Feldtheorie und QFT . . . . .	37
V.3 Symmetrien der Teilchenphysik . . . . .	38
V.4 Eichsymmetrien . . . . .	40
V.5 Spontane Symmetriebrechung . . . . .	41
VI Elektroschwache Wechselwirkung . . . . .	43
VI.1 V–A-Theorie der schwachen Wechselwirkung . . . . .	43
VI.2 Spontane Brechung von Eichsymmetrien . . . . .	45
VI.3 Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung . . . . .	45
VI.4 Higgs-Boson . . . . .	48
VII Vom Quarkmodell zur Quantenchromodynamik . . . . .	50
VII.1 Quarkmodell . . . . .	50

VII.2	Probleme des einfachen Quarkmodells . . . . .	51
VII.3	Quantenchromodynamik . . . . .	52
VIII	Ausblick . . . . .	55
IX	Kernphysik und Anwendungen . . . . .	57
IX.1	Bethe-Weizsäcker-Formel . . . . .	58
IX.2	Schalenmodell . . . . .	59
IX.3	Statistisches Modell (Thomas-Fermi) . . . . .	61
IX.4	Kernmaterie . . . . .	62
IX.5	Einige kernphysikalische Anwendungen . . . . .	62
X	Nukleare Astrophysik . . . . .	64
X.1	Kosmische (primordiale) Nukleosynthese . . . . .	64
X.2	Energieerzeugung in Sternen und solare Neutrinos . . . . .	67

### Lehrbücher

- J. Bienlein, R. Wiesendanger, Einführung in die Struktur der Materie, Teubner, 2003  
H. Frauenfelder, E.M. Henley, Teilchen und Kerne, Oldenbourg, 1999  
E.M. Henley, A. Garcia, Subatomic physics, World Scientific, 2007  
K. Bethge, Kernphysik, Springer, 2001  
T. Mayer-Kuckuk, Kernphysik, Teubner, 2002

# I Einleitung

Gliederung der Vorlesung in 4 Teile:

1. Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen  
rein deskriptive Darstellung, direkt für 7./8. Klassen AHS verwendbar
2. Von der Quantenmechanik zur relativistischen Quantenfeldtheorie  
theoretische Hilfsmittel (mit möglichst geringem mathematischen Aufwand) zur Erforschung der Struktur der Materie
3. Elektroschwache und starke Wechselwirkungen  
Standardmodell der Teilchenphysik: aktueller Stand, Probleme der Teilchenphysik und mögliche Erweiterungen
4. Kernphysik und nukleare Astrophysik  
Modelle des Atomkerns, kernphysikalische Anwendungen, kosmische Nukleosynthese, Energieerzeugung in Sternen, solare Neutrinos

Was ist eine physikalische Theorie?

Altertum bis Galilei: Naturphilosophie, kein systematischer Zusammenhang zwischen Naturbeobachtung und -philosophie

Galilei: enge Verbindung zwischen konkreter Fragestellung im Experiment und theoretischer Formulierung → Beginn der modernen Physik

(physikalische) Theorie: mathematisches Modell, das empirisches Material sichten und ordnen hilft, Zusammenhänge herstellt und Vorhersagen macht →

Bestätigung oder Widerlegung durch Experiment →

Modifikation der Theorie: meist Erweiterungen oder Verfeinerungen, selten völlig neue Grundlage (Gegenbeispiel: Quantentheorie)

Theorie als Struktur in der Vielfalt der Phänomene

mathematisches Rüstzeug unerlässlich (in dieser Vorlesung stark reduziert); ansonsten Physik als Sammelsurium kurioser Effekte (leider weit verbreitet, auch in AHS-Lehrbüchern)

Theorie erlaubt Erkennen von Zusammenhängen, der zugrundeliegenden Einfachheit in der Vielfalt der Erscheinungen → vorrangiges Ziel für AHS-Unterricht:

**Faszination der Erkenntnis vermitteln statt Kuriositätenkabinett**

Wichtige Aspekte einer physikalischen Theorie:

- Widerspruchsfreiheit statt “Wahrheit”
- Vorhersagekraft: möglichst wenige freie Parameter erstrebenswert
- Einfachheit und Schönheit subjektive Kriterien, aber große Bedeutung für Entwicklung der (theoretischen) Physik; allerdings Gefahr der Überbewertung solcher Argumente: was einfach und schön ist, ändert sich im Lauf der Zeit

## Vereinheitlichung der Physik

- i. Gravitation:  
irdische und außerirdische Phänomene genügen denselben Gleichungen  
(Newton, um 1700)
- ii. Elektromagnetismus:  
Elektrizität, Magnetismus, Licht als Manifestationen des elektromagnetischen Feldes  
(Maxwell, um 1860)
- iii. Elektroschwache Wechselwirkung: Elektromagnetismus und schwache Kernkraft ( $\beta$ -Zerfall) durch eine Theorie beschrieben (Glashow, Salam, Weinberg, 1961-68, Nobelpreis 1979; 't Hooft, Veltman, 1971-72, Nobelpreis 1999)  
→ Nobelpreise 1901 - heute: <http://www.slac.stanford.edu/library/nobel/>
- iv. G(rand)U(nified)T(heory):  
große Vereinheitlichung der elektroschwachen und starken Wechselwirkungen; theoretische Hypothese, noch nicht experimentell bestätigt
- v. Fernziel: Vereinheitlichung mit der Gravitation  
möglicherweise nicht im Rahmen einer Quantenfeldtheorie zu erreichen  
spekulativer Kandidat: Superstring-Theorie (fundamentale Fäden=Saiten=strings statt Punktteilchen)

## Theoretisches Fundament

- a. Klassische Physik  
klassischer Grenzfall der Quantentheorie: alle Wirkungen (Energie x Zeit)  $\gg \hbar$   
(Sprechweise der Theorie:  $\hbar \rightarrow 0$ )  
Beispiel: Drehimpuls  $J \gg \hbar$  (große Quantenzahlen)  
Korrespondenzprinzip (Bohr): Quantenmechanik als umfassende Theorie enthält klassische Mechanik als Grenzfall, trotzdem ist die QM die radikalste Änderung des Fundaments in der Geschichte der Physik
- b. Quantenmechanik  
Wirkung= $O(\hbar)$ , aber  $v \ll c$ ,  $E_{\text{kin}} + |E_{\text{pot}}| \ll mc^2 \rightarrow$   
nichtrelativistische Theorie: kann nur Prozesse beschreiben, in denen Teilchenzahl und -art nicht geändert werden  
Beispiel: Wasserstoffatom  $\rightarrow$  Spektrum mit QM berechenbar, aber schon Emission eines Photons erfordert
- c. Quantenfeldtheorie  
im subatomaren Bereich fast immer relativistische Theorie notwendig  
Schrödinger-Gleichung (nichtrelativistisch)  $\rightarrow$  Dirac- und Klein-Gordon-Gleichungen (relativistische Feldgleichungen)  
 $E > 2mc^2 \rightarrow$  Möglichkeit der Teilchenerzeugung (für Photonen daher immer möglich, da  $M_\gamma = 0$ )  $\rightarrow$  Vielteilchentheorie  $\equiv$  Q(uanten)F(eld)T(heorie)  
auch in Kernphysik und Festkörperphysik (Phononen, Magnonen, Plasmonen, etc.) verwendet, allerdings in diesen Fällen nichtrelativistische QFT meist ausreichend

Energie-Distanz-Skala
-----------------------

natürliche Einheiten der Teilchenphysik (auch in Kernphysik üblich) als

<u>relativistische</u>	<u>Quantenfeldtheorie</u>
$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (seit 1983 Def. des Meter)	$\hbar = 1.054571628(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ $= 6.58211899(16) \cdot 10^{-25} \text{ GeV s}$

für Größenordnungsüberlegungen sehr zweckmäßig (Sprechweise: “ $\hbar = c = 1$ ”):

Wirkungen in Einheiten von  $\hbar$   
Geschwindigkeiten in Einheiten von  $c$

→ nur mehr eine fundamentale Einheit verfügbar im MKS-System:  
Energie, Masse, Länge, Zeit ineinander umrechenbar

Energie:	$1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV} \simeq 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
Masse:	$1 \text{ kg} = 5.61 \cdot 10^{26} \text{ GeV}/c^2$ z.B. $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ , $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$
Länge, Zeit:	$\text{GeV}^{-1} = 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ s}/\hbar = 1.97 \cdot 10^{-16} \text{ m}/\hbar c$ $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \simeq \frac{\hbar c}{0.2 \text{ GeV}} \simeq 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ s c}$

→ natürliche Längen und Zeiten der Teilchenphysik (weitgehend auch für Kernphysik)

SI-System: zusätzliche Kenngröße für Elektromagnetismus (Ampère)

Feinstrukturkonstante (Stand: März 2009)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035999679(94)}$$

mit  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$  →  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Teilchenphysik verwendet fast ausschließlich Heaviside-Einheiten: neue Einheit Ampère (oder Coulomb) überflüssig ( $\epsilon_0 = 1$  gesetzt) →  $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$

Dimension von  $e$  (ESE) ergibt sich sofort aus der Dimensionslosigkeit von  $\alpha$

Ausdehnung (m)	$10^{-19}$	$10^{-16}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$	$10^{-7}$	$10^{-4}$
	Teilchen	Kerne		Atome, Moleküle		
Anregungsenergie (eV)	$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^0$	$10^{-3}$
	Teilchen	Kerne			Atome, Moleküle	

Verschiebung der Energie-Distanz-Relation: “natürliche” Relation nur im relativistischen Bereich gültig (“ $v \simeq c$ ”), bei Kernen nicht mehr ganz richtig, völlig irreführend bei Atomen (eher  $v \simeq \alpha c$ ); in klassischer Physik verliert auch  $\hbar$  seine Bedeutung → keinerlei Relation zwischen Energie (Anregungsenergie rein quantentheoretischer Begriff) und Ausdehnung

einige markante Energiewerte (Boltzmann-Konstante  $k = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ ):

LHC (CERN, ab 2008):  $E = 14 \text{ TeV}$ ,      Sonnenzentrum:  $E \simeq 1.3 \text{ keV} = 1.5 \cdot 10^7 \text{ k K}$ ,  
Zimmertemperatur:  $T = 300 \text{ K} \simeq \frac{1}{40} \text{ eV/k}$

## II Leptonen und Quarks: Bausteine der Materie

“Elementarteilchen” offenbar relativer Begriff, in der Fachliteratur kaum mehr verwendet: fundamental constituents (Quarks und Leptonen) vs. particles (alle Teilchen, auch Bindungszustände der Quarks = Mesonen und Baryonen und Trägerteilchen der fundamentalen Wechselwirkungen); in dieser Vorlesung verwende ich den Begriff Elementarteilchen für Leptonen und Quarks (auch Materieteilchen)

Atome	Elementarteilchen der	klassischen Physik
Atomkerne	— “ —	Atomphysik
Nukleonen (p,n)	— “ —	Kernphysik
Leptonen, Quarks	— “ —	Teilchenphysik

### Eigenschaften eines Elementarteilchens

- strukturlos, ohne messbare Ausdehnung → offenbar abhängig von verfügbarer experimenteller Auflösung
- keine Anregungszustände feststellbar, immer im Grundzustand → abhängig von verfügbarer Energie  
Zusammenhang in der Quantentheorie: Energie  $\sim 1/\text{Auflösung}$
- absolute Stabilität wäre zu einschränkend, aber Lebensdauer  $\tau \gg 10^{-24}$  s verlangt (Erinnerung: natürliche Zeitskala der Kern- und Teilchenphysik)

### Klassifizierung der Elementarteilchen

nach Erhaltungsgrößen (Symmetrien → Quantenzahlen)

Raum-Zeit-Symmetrie: Lorentz-Transformationen + Raum- und Zeittranslationen  
= Poincaré-Symmetrie (inhomogene Lorentz-Transformationen)

zugehörige Quantenzahlen: Masse und Spin (in Einheiten von  $\hbar$ )

außerdem spezielle (so genannte innere) Symmetrien → additive Quantenzahlen

nach derzeitigem Erkenntnisstand entsprechen die folgenden additiven Quantenzahlen exakten Symmetrien, d.h. Summe der Quantenzahlen ist in jedem Teilchenprozess (Zerfall, Streuung) erhalten

Ladung Q	
Baryonzahl B	
Leptonzahl L	möglicherweise nicht exakt (Neutrino-Oszillationen)

Leptonen
----------

negativ definiert: spüren nur die elektroschwache, aber nicht die starke Wechselwirkung  
→  $B = 0, L = 1$  für alle Leptonen (Antileptonen:  $L = -1$ )

derzeitiger Stand: genau 3 “Generationen” von Leptonen

Generation	$mc^2$	Spin ( $\hbar$ )	Q(e)	Lebensdauer
$e^-$	0.511 MeV	1/2	-1	$> 4.6 \cdot 10^{26} a$
$\nu_e$	$< 2$ eV	1/2	0	
$\mu^-$	105.66 MeV	1/2	-1	$2.2 \cdot 10^{-6} s$
$\nu_\mu$	$< 2$ eV	1/2	0	
$\tau^-$	1777 MeV	1/2	-1	$0.29 \cdot 10^{-12} s$
$\nu_\tau$	$< 2$ eV	1/2	0	

Kann es weitere Generationen von Leptonen geben?

LEP (CERN), SLC (SLAC-Stanford):  $\exists$  nur 3 leichte Neutrinos (d.h. mit Masse  $\ll 45$  GeV/ $c^2$ ) mit ähnlicher Stärke der schwachen Wechselwirkung = Kopplungsstärke an Z-Boson ( $M_Z \simeq 91$  GeV/ $c^2$ )

radioaktives Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N(0) \exp(-t/\tau) \quad (t \geq 0)$$

$$\tau_Z = \frac{\hbar}{\Gamma_Z} = \frac{\hbar}{2.49 \text{ GeV}} = 2.6 \cdot 10^{-25} s$$

Zerfallsbreite  $\Gamma_Z$  experimentell gemessen

LEP:  $e^+ + e^- \rightarrow$  Endzustand (z.B.  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $\bar{q}q$ )

$$\sigma(E) \simeq \frac{K}{(E - M_Z c^2)^2 + \Gamma_Z^2/4}$$

Resonanzquerschnitt

Breit-Wigner-Querschnitt

für welche Energien ist  $\sigma(E) = \sigma(M_Z)/2$  ?

$$\frac{K}{(E - M_Z c^2)^2 + \Gamma_Z^2/4} = \frac{1}{2} \frac{K}{\Gamma_Z^2/4} = \frac{2K}{\Gamma_Z^2} \quad \longrightarrow \quad E = M_Z c^2 \pm \Gamma_Z/2$$

daher Zerfallsbreite: Gesamtbreite bei halbem  $\sigma_{\max}$

$$dN(t) = -\frac{1}{\tau} N(t) dt = -\frac{\Gamma}{\hbar} N(t) dt$$

$\longrightarrow$   $\Gamma/\hbar$ : Wahrscheinlichkeit des Zerfalls des betreffenden Teilchen pro Zeit



i.a. (wie auch beim Z-Boson): Zerfall in verschiedene Endzustände möglich  
 (→ Particle Data Group: <http://pdg.web.cern.ch/pdg/>)

$$\Gamma_Z = \sum_f \Gamma(Z \rightarrow f)$$

$\Gamma(Z \rightarrow f)$ : partielle Zerfallsbreite in Endzustand f

$$\Gamma_Z = \underbrace{\Gamma_Z(\text{sichtbar})}_{Z \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-, \bar{q}q, \dots} + \underbrace{\Gamma_Z(\text{unsichtbar})}_{Z \rightarrow \bar{\nu}\nu}$$

sowohl  $\Gamma_Z(\text{sichtbar})$  und  $\Gamma_Z(\text{unsichtbar})$  im Standardmodell berechenbar, aber nur Gesamtbreite  $\Gamma_Z$  und  $\Gamma_Z(\text{sichtbar})$  experimentell zugänglich (Neutrinos hinterlassen keine Spuren im Detektor) →

$$\Gamma_Z - \Gamma_Z(\text{sichtbar}) = \Gamma_Z(\text{unsichtbar}) \quad \text{messbar}$$

aktueller Stand für Zahl  $N_\nu$  der Neutrinoarten (unter Verwendung von  $\Gamma_{\text{theor}}(Z \rightarrow \bar{\nu}\nu)$ )

$$N_\nu = 2.92 \pm 0.05 \quad [\text{LEP/SLC - Fit : } N_\nu = 2.9840 \pm 0.0082]$$

da  $M_Z \simeq 91.2 \text{ GeV}/c^2$ : Z-Boson kann wegen Erhaltung von Energie und Impuls nur in Neutrinos mit Masse  $< 45.6 \text{ GeV}/c^2$  zerfallen →  
 weitere Generationen mit “schweren Neutrinos” experimentell nicht ausgeschlossen

### Quarks

spüren alle fundamentalen Wechselwirkungen  
 zur Unterscheidung von Leptonen:  $L = 0, B \neq 0$

Fülle von Hinweisen für “Existenz” der Quarks, sind aber offenbar permanent gebunden in Hadronen →

### [Quark- und Gluon-]Confinement

keine isolierten Quarks (oder Gluonen) nachweisbar  
 bei hohen Temperaturen und Dichten  $\gg$  Kerndichten sollten nach der Theorie (Quantenchromodynamik QCD) Hadronen wieder in Quarks und Gluonen übergehen (Deconfinement) → Experimente zum Quark-Gluon-Plasma (CERN, Brookhaven National Lab.)

Hadronen: Quark-(und Gluon-)Bindungszustände →  
 in 1. Näherung (“naives” Quarkmodell)

$qqq$	Baryonen	p, n, Hyperonen, ...
$\bar{q}q$	Mesonen	$\pi, K, \eta, J/\psi, \Upsilon, \dots$

Bem.: Experimente können nur mit Hadronen (und natürlich Leptonen) gemacht werden, aber nicht mit Quarks, trotzdem besteht heute keinerlei Zweifel mehr an der “Existenz” von Quarks →

völlig neue Situation in der Entwicklung der modernen Physik: ein Teil der derzeit fundamentalen Konstituenten kann nicht als tatsächliche Teilchen (Spuren in Detektoren) isoliert werden → Ende der Suche nach immer kleineren Bestandteilen der Materie?

Generation	$mc^2(\text{GeV})$	Spin ( $\hbar$ )	Q(e)	B
$u$ [up]	$\sim 0.3$	1/2	2/3	1/3
$d$ [down]	$\sim 0.3$	1/2	-1/3	1/3
$c$ [charm]	$\sim 1.5$	1/2	2/3	1/3
$s$ [strange]	$\sim 0.5$	1/2	-1/3	1/3
$t$ [top]	172	1/2	2/3	1/3
$b$ [bottom]	4.5	1/2	-1/3	1/3

wieder 3 Generationen: gleich viele Lepton- wie Quark-Generationen (strikte Vorhersage des Standardmodells)

Masse: so genannte Konstituentenmassen in der Tabelle angegeben  
wegen Confinement ist Massenbegriff definitionsabhängig  
(kann Quarks nicht auf die Waage legen)

Beispiele für Hadronen als Bindungszustände:

Proton  $uud \longrightarrow Q = 2 \times 2/3 - 1/3 = 1$

$J = 1/2$  (Grundzustand),  $B = 3 \times 1/3 = 1$

Neutron  $udd \longrightarrow Q = 2 \times (-1/3) + 2/3 = 0, \quad J = 1/2, \quad B = 1$

Pion  $\pi^+ \sim u\bar{d} \longrightarrow Q = 2/3 - (-1/3) = 1, \quad J = 0, \quad B = 0$

Allgemeine Eigenschaften der (Materie-)Teilchen

i. Antiteilchen (Antimaterie)

grundlegende Erkenntnis der QFT: zu jedem Teilchen  $\exists$  Antiteilchen mit gleicher Masse und Spin, aber entgegengesetzten additiven Quantenzahlen  $Q, B, L, \dots$

Antileptonen:  $e^+, \bar{\nu}_e, \mu^+, \bar{\nu}_\mu, \tau^+, \bar{\nu}_\tau \quad L = -1, B = 0$

Antiquarks  $\bar{q}$ :  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{b} \quad L = 0, B = -1/3$

allerdings: Teilchen können ihre eigenen Antiteilchen sein  $\longrightarrow$   
notwendigerweise  $Q = B = L = 0$

daher können nur Hadronen und Träger der fund. Wechselwirkungen ihre eigenen Antiteilchen sein:  $\pi^0, \gamma, Z, \dots$

ii. "Farbe"

QCD: jeder Quark (und Antiquark) einer bestimmten Art (flavour:  $u, d, c, s, t, b$ ) hat 3 weitere Freiheitsgrade,  $\exists$  also in 3 Varianten: Farbe (colour)  $\longrightarrow$

Q(uanten)C(hromo)D(ynamik) = Eichtheorie der starken Wechselwirkung

hat natürlich überhaupt nichts mit der üblichen Farbe zu tun

Hadronen (Mesonen und Baryonen) und Leptonen sind dagegen "weiß" (Farb-Singletts)

### iii. Spin und Statistik

auffallend: alle Leptonen und Quarks haben Spin 1/2

Statistik: Eigenschaft der Wellenfunktion zweier identischer Teilchen bei Vertauschung der beiden Teilchen (analog für mehrere ununterscheidbare Teilchen)

symmetrisch	$\psi(1, 2) = \psi(2, 1)$	Bose-Einstein-Statistik	Bosonen
antisymmetrisch	$\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$	Fermi-Dirac-Statistik	Fermionen

Postulat der Quantenmechanik: Elektronen sind Fermionen  $\rightarrow$  Pauli-Verbot  $\rightarrow$  Atomstruktur

Erklärung durch QFT (Pauli 1940)

Spin-Statistik-Theorem  
 Bosonen (Fermionen) haben ganzzahligen (halbzahligen) Spin

$\rightarrow$  Leptonen und Quarks sind alle Fermionen

aber nicht alle Hadronen sind deswegen Fermionen

Baryonen	$qqq$	$\rightarrow$	Gesamtspin halbzahlig	Fermionen
Mesonen	$\bar{q}q$	$\rightarrow$	Gesamtspin ganzzahlig	Bosonen

Wiederholung: Drehimpulsaddition

### iv. Additive Quantenzahlen

Ladungserhaltung offensichtlich

$$\begin{array}{ll}
 e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- & e^- + p \rightarrow e^- + p \\
 e^+ + e^- \not\rightarrow e^- + e^- & e^- + p \not\rightarrow e^- + n
 \end{array}$$

B- und L-Erhaltung

$$\begin{array}{ll}
 e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma & \rightarrow L_\gamma = B_\gamma = 0 \\
 & \text{da } L(e^+e^-) = B(e^+e^-) = 0
 \end{array}$$

	$e^-$	+	$p$	$\not\rightarrow$	$\gamma$	+	$\gamma$	aber	$\nu_e$	+	$n$	$\rightarrow$	$e^-$	+	$p$
$L$	1		0		0		0		1		0		1		0
$B$	0		1		0		0		0		1		0		1

$\beta$ -Zerfall und zugehöriger Quark-Zerfall

	$n$	$\rightarrow$	$p$	+	$e^-$	+	$\bar{\nu}_e$		$d$	$\rightarrow$	$u$	+	$e^-$	+	$\bar{\nu}_e$
$L$	0		0		1		-1		0		0		1		-1
$B$	1		1		0		0		1/3		1/3		0		0

aber  $n \not\rightarrow p + e^-$  wegen  $\Delta L \neq 0$  (auch wegen Drehimpulserhaltung)

Status:

$Q$  absolut erhalten

$B$  wäre verletzt, wenn Proton zerfällt (da Proton leichtestes Baryon)

trotz intensiver Suche kein experimenteller Hinweis:  $\tau_p \gtrsim 10^{29}$  a

Diskussion: Alter des Universums  $\sim 1.4 \cdot 10^{10}$  a

$L$ -Verletzung möglich, seit massive Neutrinos nachgewiesen (Neutrino-Oszillationen), noch kein direkter Hinweis, aber Verletzung sicher sehr gering

Weitere additive Quantenzahlen:

starke und elektromagnetische Wechselwirkungen ändern nie die Quarkart (flavour), da  $\bar{q}q$  immer paarweise produziert werden  $\longrightarrow$

additive Quantenzahlen  $N_u, N_d, N_c, N_s, N_t, N_b$ , auch  $N_s = S(\text{eltenheit})$ ,  $N_c = C(\text{harm})$ , etc.

Flavour-Quantenzahlen werden aber durch die schwachen Wechselwirkung verletzt, z.B.

$$\begin{array}{ll} \beta\text{-Zerfall} & d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \\ \text{K-Zerfall} & s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \end{array}$$

nur die Summe aller dieser Quantenzahlen ist absolut erhalten, da Baryonzahl

$$B = \frac{1}{3} (N_u + N_d + N_c + N_s + N_t + N_b)$$

### III Fundamentale Wechselwirkungen

<u>makroskopische Kräfte</u>	<u>Kernkräfte</u>
Gravitation	starke Kernkraft
Elektromagnetismus	schwache Kernkraft
→ elektroschwache Ww. ←	

QFT: Wechselwirkung durch Quant(en) charakterisiert →  
Austauschbild der fundamentalen Kräfte

Relation zwischen

Masse des ausgetauschten Teilchens und Reichweite der Wechselwirkung

Compton-Wellenlänge  $R = \frac{\hbar}{Mc}$

Austausch eines Teilchens mit Masse  $M$  führt im nichtrelativistischen Fall auf das

Yukawa-Potenzial  $\frac{\exp(-r/R)}{r} = \frac{\exp(-Mrc/\hbar)}{r}$

makroskopische Kräfte	$\Leftrightarrow$	masselose Quanten
$R = \infty$	$\Leftrightarrow$	$M = 0$

#### III.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Austauschquant: Photon Spin=1, Masse=0 ( $M_\gamma < 2 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}/c^2$ )

fundamentaler Prozess der Q(uanten)E(lektro)D(ynamik):

Emission oder Absorption eines Photons durch ein geladenes Teilchen

grafische Darstellung (für  $e^-$ ):

Feynman-Diagramm

nur mit QFT zu behandeln:

Teilchenzahl und -art geändert

allerdings: nicht als tatsächlicher phys. Prozess möglich, verletzt Impulserhaltung

realistischer Prozess: Compton-Streuung  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Stärke der elm. Wechselwirkung  $\sim$

Ladung  $Q$  des geladenen Teilchens  $\rightarrow$

Amplitude für Compton-Streuung  $\sim$

$e^2$  in niedrigster Ordnung QED  $\rightarrow$

Wirkungsquerschnitt  $\sim e^4 \sim \alpha^2$

Bem.: Elektron im Zwischenzustand ist ein virtuelles Teilchen, da Relation zwischen Energie, Impuls und Masse verletzt

Feynman-Diagramme nicht tatsächlich in Raum und Zeit ablaufende Prozesse, trotzdem anschauliche Notation für wohldefinierte physikalische Wahrscheinlichkeitsamplituden

## Charakterisierung der Stärke einer Wechselwirkung

### a. Zerfälle

je stärker die Wechselwirkung,

desto größer die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit  $\Gamma/\hbar = 1/\tau$

Teilchen kann nur dann dominant elektromagnetischen Zerfall haben, wenn es stabil gegenüber der starken Wechselwirkung ist

Bsp.:  $\pi^0$ -Meson mit Masse  $M = 135 \text{ MeV}/c^2$  (leichtestes Hadron)

zerfällt fast ausschließlich in 2 Photonen (zu 98.8 %)

$$\tau_{\pi^0} = (8.4 \pm 0.6) \cdot 10^{-17} \text{ s} \gg 10^{-24} \text{ s}$$

trotzdem Lebensdauer nicht direkt messbar ( $c\tau_{\pi^0} = 25 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ )

### b. Streuprozesse

typische Anordnung (mit ruhendem Target)

Strahl                      Target                      Endzustand  $f$

Anzahl der Ereignisse vom Typ  $f$ /Zeit:  $N_f$

(meist homogene) Teilchendichten im Strahl, bzw. Target:  $\rho_S(\vec{r}), \rho_T(\vec{r})$

Strahlgeschwindigkeit  $v$  (relativ zum ruhenden Target)

Def.: Streu- oder Wirkungsquerschnitt für  $S + T \rightarrow f$

$$\sigma(S + T \rightarrow f) = \frac{N_f}{v \int d^3r \rho_S(\vec{r}) \rho_T(\vec{r})}$$

Dimension:  $[\sigma] = \frac{s^{-1}}{m s^{-1} m^3 m^{-6}} = m^2$

Interpretation von  $\sigma$ : effektive Fläche/Targetteilchen für einlaufendes Strahlteilchen

$\sigma$  von  $S, T, f$  und von Gesamtenergie abhängig; differenzielle Wirkungsquerschnitte auch von zusätzlichen kinematischen Variablen abhängig

## Compton-Streuung

für  $E_\gamma \ll m_e c^2$   $\longrightarrow$   $m_e$  einzige relevante Größe (außer  $\hbar, c$ )

Erwartung:

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2 \hbar^2}{m_e^2 c^2} = \alpha^2 R_C^2$$

tatsächlich (Thomson-Limes der Compton-Streuung)

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3}\alpha^2 R_C^2 = 0.67 \text{ b(arn)}$$

Einheit des Wirkungsquerschnitts in der Kern- und Teilchenphysik

$$1 \text{ b(arn)} = 10^{-28} \text{ m}^2 \qquad \text{barn} = \text{Scheune(ntor)!}$$

Vergleich mit klassischem Elektronradius  $R_{\text{kl}} = \frac{e^2}{4\pi m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

$R_{\text{kl}}$	$<$	$R_C = R_{\text{kl}}\alpha^{-1}$	$<$	$R_B = R_{\text{kl}}\alpha^{-2} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_e e^2}$
$2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$		$3.9 \cdot 10^{-13} \text{ m}$		$0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
klassischer Radius		Compton-Wellenlänge QFT		Bohrscher Radius QM

Thomson-Querschnitt  $\longrightarrow$  Compton-Wellenlänge natürliche “Größenordnung” eines “punktförmigen” Elementarteilchens mit Masse  $m_e$

klassischer Elektronradius völlig irreführend, da klassische Physik in diesem Bereich längst nicht mehr gültig ist

Proton ist dagegen sicher kein “punktförmiges” Elementarteilchen:

totaler Photoproduktionsquerschnitt am Proton ( $X$  steht für alle möglichen Endzustände)

$$\sigma(\gamma + p \rightarrow X) \simeq 0.1 \text{ mb} \quad \text{für } E_\gamma \gg m_p c^2$$

Interpretation über Ansatz

$$\sigma(\gamma + p \rightarrow X) \sim \alpha\pi R^2 \simeq 10^{-32} \text{ m}^2$$

$$\longrightarrow R \sim 0.7 \cdot 10^{-15} \text{ m} \sim 1 \text{ fm}$$

abgesehen von Kopplungsstärke  $e$  ( $\alpha$  im Wirkungsquerschnitt) ist das genau der erwartete geometrische Querschnitt des Protons, wie aus Messungen der Kernradien bekannt (wogegen  $R_C(\text{Proton}) = 0.2 \text{ fm}$ )

QED: erfolgreichste Theorie der gesamten Physik  $\longrightarrow$  von intergalaktischen Magnetfeldern bis derzeit  $\sim 10^{-18} \text{ m}$  erfolgreich getestet, bestimmt die gesamte Atom- und Festkörperphysik, Chemie, ...

### III.2 Gravitation

für phänomenologische Teilchenphysik ( $\sim$  exp. relevante Teilchenphysik) ohne Bedeutung

Potenzial zweier Protonen im Abstand  $r$

$$V_{\text{Coulomb}} = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha\hbar c}{r} \qquad V_{\text{Newton}} = -\frac{G_N m_p^2}{r}$$

Verhältnis (Newtonsche Gravitationskonstante  $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ )

$$\frac{|V_{\text{Newton}}|}{|V_{\text{Coulomb}}|} = \frac{G_N m_p^2}{\alpha \hbar c} = 8 \cdot 10^{-37}$$

→ Gravitation für praktische Zwecke vernachlässigbar

aber: zum Unterschied von  $\alpha$  ist  $G_N$  dimensionsbehaftet

$$E_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N}} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \quad \text{Planck-Masse}$$

$$l_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad \text{Planck-Länge}$$

Folgerung: bei Energien  $\sim E_{\text{Planck}}$ , Distanzen  $\sim l_{\text{Planck}}$   
Gravitation sicher nicht mehr vernachlässigbar

Theorie: derzeit existiert keine befriedigende QFT der Gravitation  
wahrscheinlich Erweiterung der QFT notwendig (Superstrings?)

Quant: Graviton Spin=2,  $M = 0$

### III.3 Schwache Wechselwirkung

verantwortlich für  $\beta$ -Zerfall



einfachster rein leptonischer Prozess:

(Prozesse mit Neutrinos sind immer Prozesse der schwachen Wechselwirkung)



Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung (Kopplungskonstante  $G_F$ )

$$\text{Amplitude} \sim G_F$$

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) \sim G_F^2 \sim \tau_\mu^{-1}$$

$$\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad \longrightarrow \quad G_F = 1.16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Folgerung: tatsächlich "schwache" Kraft mit sehr kurzer Reichweite

Vergleich:  $\tau_\mu \gg \tau_{\pi^0} \sim 10^{-16} \text{ s}$  für elm. Zerfall eines fast gleich schweren Teilchens

#### Wechselwirkung von Neutrinos mit Materie

hauptsächlich ( $N = p$  oder  $n$ ;  $l = e, \mu$ ;  $X$  Summe aller möglichen Endzustände)

$$\sigma(\nu_l + N \rightarrow l + X) \sim 10^{-5} \text{ nb} \frac{E_\nu}{\text{GeV}} \quad (\text{für } m_N c^2 \ll E_\nu \ll 100 \text{ GeV})$$



Veranschaulichung: mittlere freie Weglänge  $L_\nu$  von Neutrinos in Materie

$$L_\nu = \frac{1}{\sigma_{\text{total}} \rho_{\text{Target}}}$$

Abschwächung eines Neutrinostrahls in Materie (Dicke  $d$ ; analog radioaktivem Zerfallsgesetz)

$$N(d) = N(0) \exp(-d/L_\nu)$$

$$H_2O: \quad \rho(\text{Nukleonen}) \sim 6 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} \quad \longrightarrow \quad L_\nu(H_2O) \sim \frac{1.6 \cdot 10^{12} \text{ m}}{E_\nu(\text{GeV})}$$

zum Vergleich: Distanz zwischen Erde und Sonne  $\sim 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Anzahl der Ereignisse in  $1 \text{ m}^3 H_2O$ :

$$N_f = \sigma \rho_S v \int d^3r \rho_T = 6 \cdot 10^{-13} N_\nu / s \quad E_\nu(\text{GeV})$$

wobei Neutrinofluss  $\rho_S v = N_\nu \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

→ Nachweisbarkeit von Neutrino-Prozessen erfordert hohe Flüsse  
tatsächlich großer Sonnenneutrinofluss ( $E_{\nu_e} \leq 14 \text{ MeV}$ ) auf Erdoberfläche:

$$N_\nu = 6.67 \cdot 10^{14}$$

wesentlich kleinere Flüsse hochenergetischer Neutrinos im Labor

#### Aktueller Stand der Theorie der schwachen Wechselwirkung

ähnlich wie bei Gravitation nimmt Stärke mit Energie zu (wieder  $[G_F] = E^{-2}$ ) →  
bei hohen Energien ( $E \gtrsim 100 \text{ GeV}$ ) schwache Ww. vergleichbar mit elektromagnetischer Ww.  
fundamentale Prozesse (für Quarks analog)

$$l = e, \mu, \tau$$

$W^\pm, Z$ : Quanten der schwachen Wechselwirkung (Eichbosonen, Spin 1)

theoretische Vorhersage: Glashow, Salam, Weinberg (Nobelpreis 1979) →

Entdeckung: CERN 1983 (Rubbia, van der Meer: Nobelpreis 1984)

aktuelle Massenwerte (große Massen ↔ extrem kurze Reichweite)

$$M_W = 80.398(25) \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.1876(21) \text{ GeV}/c^2$$

moderne Interpretation des  $\mu$ -Zerfalls:

$$E \ll M_W c^2$$

$$G_F \sim \frac{g^2}{M_W^2 c^4}$$

Vereinheitlichung:  $g \sim e \quad \longrightarrow \quad G_F \sim \frac{4\pi\alpha}{M_W^2 c^4}$

$\longrightarrow \quad M_W c^2 \sim \sqrt{4\pi\alpha/G_F} = 88 \text{ GeV}$

Vereinheitlichung Basis der theoretischen Vorhersagen von  $M_W, M_Z$

### III.4 Starke Wechselwirkung

hält Atomkerne zusammen (gegen Coulombabstoßung der Protonen)

direkt messbar in hadronischen Prozessen, z.B.

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^+ + p \rightarrow X) \sim 12 \text{ mb} \quad \text{für } E_\pi \gg m_p & \quad [\sigma(\gamma + p \rightarrow X) \sim 0.1 \text{ mb}] \\ \Gamma(\rho \rightarrow \pi\pi) \sim 150 \text{ MeV} & \quad \longrightarrow \quad \tau_\rho = \hbar/\Gamma_\rho \sim 4 \cdot 10^{-24} \text{ s} \end{aligned}$$

Problem: Hadronen komplexe Bindungszustände von Quarks und Gluonen, die aber unter normalen Bedingungen nicht isoliert werden können

$\longrightarrow$  bis Anfang 70 keine realistische QFT der starken Wechselwirkung

Quarkmodell + Erfolg der elektroschwachen Eichtheorie führt zur

QCD: Eichtheorie der starken Wechselwirkung

fundamentaler Prozess (nur Quarks, keine Leptonen beteiligt)

$i = 1, 2, 3$  "Farb"-Indizes

8=9-1 Gluonen  $G_{ij}$

(" $\exists$  kein farbloses Gluon")

Schwierigkeit:  $M_{\text{Gluon}} = 0$  wie für Photon in QED

wie kann man damit kurze Reichweite ( $\sim \text{fm}$ ) verstehen?

Erklärung: Farbe ist in allen Hadronen abgesättigt (Hadronen sind "farblos")  $\longrightarrow$   
starke Kernkraft in Analogie zur van der Waals-Kraft zwischen elektrisch neutralen Molekülen zu verstehen

Hypothese (viele Hinweise, aber noch keine direkte Herleitung aus der QCD):

weder Quarks noch Gluonen können (als farbige Objekte) isoliert auftreten

$\longrightarrow$  Confinement, "infrarote Sklaverei"

weitere (allerdings diesmal streng beweisbare) Eigenschaft der QCD:

asymptotische Freiheit (Gross, Wilczek, Politzer, 1973; Nobelpreis 2004):

Stärke der Wechselwirkung nimmt mit der Energie ab

$\longrightarrow$  bei hohen Energien Quarks und Gluonen "fast" frei

$\longrightarrow$  Quarks und Gluonen als Hadronbündel "sichtbar"

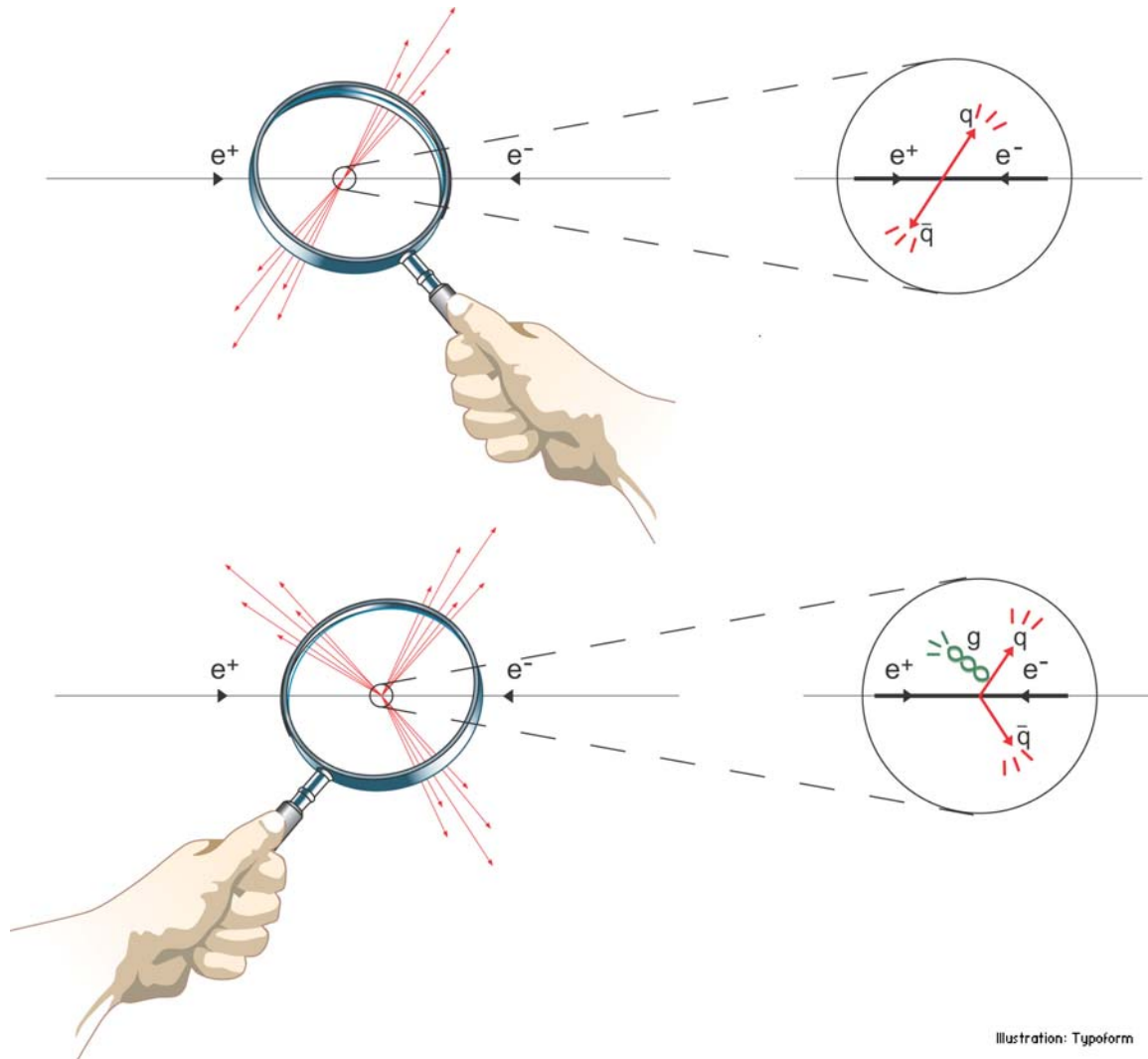


Illustration: Typoform

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow 2 \text{ Jets}, \quad e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G \rightarrow 3 \text{ Jets}$$

### III.5 Austauschquanten und Materieteilchen

Wechselwirkung	Quanten	Spin ( $\hbar$ )	$Q(e)$	$Mc^2(\text{GeV})$
elektromagnetisch	$\gamma$	1	0	0
schwach	$W^\pm$	1	$\pm 1$	80.4
	$Z$	1	0	91.2
stark	Gluonen	1	0	0
Gravitation	Graviton	2	0	0

- i. zum Unterschied von den Materieteilchen sind alle fundamentalen Quanten Bosonen; alle haben  $B = L = 0$
- ii. alle mikroskopisch relevanten Quanten haben Spin 1  
Grund: alle werden durch Eichtheorien beschrieben (Vektorpotenziale!)
- iii. Photon, Gluonen, Graviton natürlich stabil (wie alle masselosen Teilchen), aber  $W, Z$  sind hochgradig instabil

$$\Gamma_W = 2.141(41) \text{ GeV} \longrightarrow \tau_W = 3.1 \cdot 10^{-25} \text{ s}$$

$$\Gamma_Z = 2.4952(23) \text{ GeV} \longrightarrow \tau_Z = 2.6 \cdot 10^{-25} \text{ s}$$

#### Materieteilchen und fundamentale Wechselwirkungen

Teilchen	elektromagnetisch	stark	schwach	Gravitation
Neutrinos	–	–	•	•
$e, \mu, \tau$	•	–	•	•
Quarks	•	•	•	•

# IV Von der Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie

## IV.1 Quantenmechanik

klassische Mechanik:  $N$  Teilchen  $\rightarrow$   $6N$  Variable  $(q_a, p_a) \quad a = 1, \dots, 3N$

Anfangsbedingungen:  $q_a(t=0), p_a(t=0) \rightarrow q_a(t), p_a(t)$  berechenbar

Quantenmechanik: Ort und Impuls nicht gleichzeitig messbar

Feynman: alle begrifflichen Schwierigkeiten auf Doppelspalt-Experiment zurückzuführen

Quelle

Detektor

wenn beide Spalten offen, Interferenz selbst bei kleinsten Intensitäten: sogar einzelnes Photon interferiert mit sich selbst  $\rightarrow$

Superposition (Interferenz) von Wahrscheinlichkeitsamplituden

Quadrat der Amplitude = Wahrscheinlichkeit (nicht etwa ausgeschmierte Energiedichte!)

Schirm sukzessive durchlöchert  $\rightarrow$  im Grenzfall Überlagerung unendlich vieler Amplituden (Feynmansche Wegintegralformulierung der QM)  $\rightarrow$

QM benötigt einen unendlichdimensionalen (Vektor-)Raum mit (komplexem) Skalarprodukt (Norm=Wahrscheinlichkeit)  $\rightarrow$

physikalische Zustände sind Elemente eines Hilbertraumes  $\mathcal{H}$

### Grundelemente der Quantenmechanik

1. physikalischer Zustand zur Zeit  $t$  entspricht (Zustands-)Vektor

$$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$$

2. jeder physikalischen Messgröße (Observable) entspricht ein linearer, hermitescher ( $A^\dagger = A$ ) Operator  $A$ , der auf die Zustände in  $\mathcal{H}$  wirkt; die physikalisch möglichen Werte der Observablen sind durch die Eigenwerte von  $A$  gegeben (wichtiges Beispiel:  $A = H$  Hamilton-Operator)

$$A|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle \quad \overset{A^\dagger=A}{\implies} \quad \text{reelle Eigenwerte } a_n$$

Grundaxiom der QM: Operatoren für Ort und Impuls eines Teilchens (selbe Symbole wie in der klass. Mechanik verwendet) erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[q_a, p_b] := q_a p_b - p_b q_a = i\hbar \delta_{a,b}$$

$\rightarrow$  Ort und Impuls nicht gleichzeitig messbar, Heisenbergsche Unschärferelation

3. Superpositionsprinzip: jeder Zustand kann nach Eigenzuständen jedes beliebigen hermiteschen Operators  $A$  entwickelt werden:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) |\phi_m\rangle$$

komplexe Zahlen  $c_m(t)$ : Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass System sich im Zustand  $\phi_m$  befindet

→ durch Skalarprodukt in  $\mathcal{H}$  gegeben:

$$\langle \phi_n | \psi(t) \rangle = \sum_m c_m(t) \underbrace{\langle \phi_n | \phi_m \rangle}_{\delta_{nm}} = c_n(t)$$

$|c_n(t)|^2$ : Wahrscheinlichkeit für Messung des Eigenwertes  $a_n$  zur Zeit  $t$

spezielle Basis: Eigenzustände des Ortsoperators eines Teilchens

$$q_i |\vec{r}\rangle = x_i |\vec{r}\rangle \quad (i = 1, 2, 3)$$

Wellenfunktion in Ortsdarstellung = Wahrscheinlichkeitsamp., dass Teilchen sich zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{r}$  befindet

$$c_{\vec{r}}(t) \equiv c(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle =: \psi(\vec{r}, t)$$

4. Zeitentwicklung

$$H |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar) |\psi(0)\rangle$$

ergibt übliche Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung

$$H(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad H(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$$

[für Experten: Hamilton-Operator  $H(\vec{r})$  in Ortsdarstellung definiert durch

$$\langle \vec{r} | H | \vec{r}' \rangle = H(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') ]$$

## IV.2 Warum QFT

- Teilchenzahl

QM ist eine Einteilchentheorie, Teilchenerzeugung (für  $E > 2m$ ) erfordert relativistische Vielteilchentheorie = QFT

- Kausalität

QM: Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass Teilchen (Masse  $m$ ) in Zeit  $t$  von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r}$

$$A(\vec{r}_0, \vec{r}; t) = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{im(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{2\hbar t} \right)$$

Folgerung:  $|A|^2 \neq 0 \quad \forall \vec{r}, t \quad \longrightarrow$  Teilchen kommt mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit in bel. Zeit überall hin  $\longrightarrow$  offensichtliche Verletzung der Kausalität: Lichtgeschwindigkeit  $c$  maximale Geschwindigkeit für Übertragung von Signalen

- Vertauschungsrelationen

Versuch einer relativistischen Verallgemeinerung der kanonischen Vertauschungsrelationen zwischen Orts- und Impulsoperator zum Scheitern verurteilt

Hauptproblem: zum Unterschied vom Ort  $\vec{r}$  kann die Zeit  $t$  nicht durch einen Operator dargestellt werden

Dilemma: Lorentztransformationen verbinden aber Ort und Zeit !?

Ausweg: statt Zeit  $t$  als Operator  $\longrightarrow$  Ort  $\vec{r}$  zu nichtquantisierter Variable degradieren  
 $\longrightarrow$  Quantenobjekte werden von  $x^\mu = (t, \vec{r})$  abhängen

einfachster Fall: Quantenobjekte hängen von einzigem Raum-Zeit-Punkt ab  $\longrightarrow$

lokale Quantenfelder  $\phi(x), \psi(x), A^\mu(x), \dots$

		Spin
$\phi(x)$	Skalarfeld	0
$\psi(x)$	Spinorfeld	1/2
$A^\mu(x)$	Photonfeld	1

wichtig: QFT nicht aus QM oder klassischer Feldtheorie ableitbar  $\longrightarrow$  Postulat der Feldquantisierung notwendig (manchmal etwas missverständlich als 2. Quantisierung bezeichnet)

### IV.3 Feldquantisierung

Analogie: Quantenfelder als (unendlich) viele harmonische Oszillatoren interpretiert sowohl in klassischer Mechanik und QM:

harmonischer Oszillator oft 1. Näherung für glattes, nach unten beschränktes Potenzial

$x = r - r_0$ : Auslenkung aus Ruhelage

harmonische Näherung (gestrichelt):

klassisch oder quantenmechanisch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + V_0$$

mit  $m\omega^2 := V''(r_0)$

Energieniveaus:  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$

Verallgemeinerung für  $f$  Freiheitsgrade (bisher  $f = 1$ ): Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{P_\alpha^2}{M_\alpha} + M_\alpha \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \right)$$

mit kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[Q_\alpha, P_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}, \quad [Q_\alpha, Q_\beta] = [P_\alpha, P_\beta] = 0$$

Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren  $a_\alpha, a_\alpha^\dagger$

$$a_\alpha = \sqrt{\frac{M_\alpha \omega_\alpha}{2\hbar}} Q_\alpha + \frac{i}{\sqrt{2\hbar M_\alpha \omega_\alpha}} P_\alpha \quad \longrightarrow$$

Hamilton-Operator und Vertauschungsrelationen

$$H = \sum_{\alpha=1}^f \hbar \omega_\alpha \left( a_\alpha^\dagger a_\alpha + 1/2 \right), \quad [a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0$$

### Interpretation

relevante Freiheitsgrade sind nicht die ursprünglichen (oft verallgemeinerten) Koord. und Impulse, sondern die Oszillatorvariablen  $a_\alpha, a_\alpha^\dagger \longrightarrow$  beschreiben Quanten des Systems

Festkörperphysik :	Phononen, Magnonen, ...
Teilchenphysik :	Photonen, $W^\pm, Z$ , Gluonen (Spin 1)
	Materieteilchen (Spin 1/2)

N.B.: zum Unterschied von Photonen (und anderen Teilchen) sind Phononen und Magnonen Quasiteilchen, die nur innerhalb des Festkörpers existieren

### Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

bereits die klassische (Maxwell-)Theorie ist eine relativistische Feldtheorie  
(hoffentlich nur) zur Erinnerung:

- Zeit  $t$  und Ort  $\vec{r}$  werden zu einem Vierervektor  $x^\mu = (ct, \vec{r})$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) zusammengefasst
- elektrische und magnetische Felder  $\vec{E}(x), \vec{B}(x)$  werden zu einem Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}(x)$  zusammengefasst (ab jetzt immer  $x = (ct, \vec{r})$  als Raum-Zeit-Variable)

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

- unter Lorentz-invarianten (oder einfach relativistischen) Gleichungen versteht man Gleichungen, die in jedem Inertialsystem die gleiche Form haben; 2 beliebige Inertialsysteme sind natürlich durch eine Lorentz-Transformation verbunden

Maxwell-Gleichungen sind relativistisch invariant:

mit Viererstrom  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$  aus Ladungs- und Stromdichte  $\rho, \vec{j}$  können die Maxwell-Gleichungen in einer manifest Lorentz-invarianten Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = j^\nu / c, \quad \frac{\partial}{\partial x_\nu} F^{\rho\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} F^{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} F^{\sigma\nu} = 0$$



dabei wird wie (fast) immer die Einsteinsche Summenkonvention verwendet:

z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} := \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{0\nu} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i\nu}$$

Übungsaufgabe: verifizieren Sie, dass diese Gleichungen tatsächlich die Maxwell-Gleichungen in der “üblichen” Form sind

Lösung der Maxwell-Gl. am besten mit Hilfe des (unphysikalischen, da eichabhängigen) Viererpotenzials (skalares Potenzial  $V$ , Vektorpotenzial  $\vec{A}$ )

$$A = (V, \vec{A}) \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu$$

diese Tensorgleichungen für  $F^{\mu\nu}$  sind gerade die bekannten Relationen zwischen Potenzialen und Feldstärken:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

mit geeigneter Wahl der Eichung (Lorenz-Eichung:  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = 0$ , also  $\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ )  
reduzieren sich die Maxwell-Gl. auf (mit dem d'Alembert-Operator  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ )

$$\square A^\mu = \frac{j^\mu}{c} \quad \text{inhomogene Wellengleichungen}$$

ohne Ladungen und Ströme, d.h. für  $j = 0$ , kann Eichung weiter vereinfacht werden:

$$A^0 = V = 0, \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Wellengleichungen} = \text{d'Alembert-Gleichungen}$$

$$\square \vec{A} = 0$$

vollständiges System von Lösungen für  $\vec{A}(x)$  :

$$\text{monochromatische ebene Wellen} \quad \sim \quad \exp(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{r})$$

erfüllen die Wellengleichung genau dann, wenn  $\omega(k) = c|\vec{k}|$

Kreisfrequenz  $\omega$ , Wellenzahlvektor  $\vec{k}$ , Wellenlänge  $2\pi/|\vec{k}|$

Allgemeine Lösung: Überlagerung monochromatischer ebener Wellen  $\equiv$  Fourierzerlegung

$$\vec{A}(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \int \underbrace{\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(k)}}_{d\mu(k)} \left( \exp(-ik \cdot x) \vec{\varepsilon}_\alpha(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k}) + \exp(ik \cdot x) \vec{\varepsilon}_\alpha^*(\vec{k}) a_\alpha^*(\vec{k}) \right)$$

mit  $k \cdot x := \omega(k)t - \vec{k} \cdot \vec{r}$

dieses allgemeine “Wellenpaket”  $\vec{A}(x)$  erfüllt

$$\square \vec{A} = 0 \quad \text{wegen} \quad \omega(k) = c|\vec{k}|$$

Polarisationsvektoren  $\vec{\varepsilon}_\alpha(\vec{k})$  mit Normierung  $\vec{\varepsilon}_\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_\alpha(\vec{k}) = 0$$

Folgerung: zu jedem  $\vec{k}$  (QFT: Impuls des Photons)  $\exists$  2 auf  $\vec{k}$  orthogonale Polarisationsvektoren  $\longrightarrow$  Strahlungsfeld ist transversal  $\sim$  Photon hat genau 2 transversale Freiheitsgrade (z.B. links- oder rechtshändig polarisiert)

Energie des (immer noch klassischen) elektromagnetischen Feldes

$$E = \frac{1}{2} \int d^3r (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) \omega(k) a_\alpha^*(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k})$$

$\longrightarrow$  kontinuierliche Summe von harmonischen Oszillatoren!

Postulat der Feldquantisierung

Feldoperatoren  $\vec{A}(x)$  mit Vertauschungsrelationen für Fourierkomponenten (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

$$[a_\alpha(\vec{k}), a_\beta^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 2\omega(k) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a_\alpha(\vec{k}), a_\beta(\vec{k}')] = 0$$

N.B.: die (in diesem Fall 3-dimensionale) Delta-Funktion  $\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$  ist die Verallgemeinerung des Kronecker-Delta für kontinuierliche Variable

$\longrightarrow$  Hamiltonoperator  $H$ , Impulsoperator  $\vec{P}$  des elektromagnetischen Feldes

$$H = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) \hbar\omega(k) a_\alpha^\dagger(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k}), \quad \vec{P} = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) \hbar\vec{k} a_\alpha^\dagger(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k})$$

da  $H$  ein (semi-)positiv definiten Operator ist, gibt es einen Zustand niedrigster Energie = 0, das Vakuum  $|0\rangle$  mit (daher heißt  $a_\alpha(\vec{k})$  auch Vernichtungsoperator)

$$a_\alpha(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \longrightarrow \quad H|0\rangle = 0, \quad \vec{P}|0\rangle = 0$$

mit den Erzeugungsoperatoren  $a_\alpha^\dagger(\vec{k})$  können jetzt wie beim normalen harmonischen Oszillator die Zustände mit einem oder mehreren Photonen konstruiert werden

1-Photon-Zustand:  $|\vec{k}, \alpha\rangle = a_\alpha^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad \longrightarrow$

$$H|\vec{k}, \alpha\rangle = \hbar\omega|\vec{k}, \alpha\rangle, \quad \vec{P}|\vec{k}, \alpha\rangle = \hbar\vec{k}|\vec{k}, \alpha\rangle$$

Photon mit Energie  $\hbar\omega$  und Impuls  $\hbar\vec{k}$   $\longrightarrow$  wegen  $\omega(k) = c|\vec{k}|$  ist das Photon masselos (allg. Relation  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  zwischen Energie und Impuls eines Teilchens mit Masse  $m$ )

allgemeiner 2-Photon-Zustand:

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \int d\mu(k_1) d\mu(k_2) f_{\alpha_1, \alpha_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a_{\alpha_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{\alpha_2}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle$$

wegen Vertauschungsrelation  $[a_{\alpha_1}^\dagger(\vec{k}_1), a_{\alpha_2}^\dagger(\vec{k}_2)] = 0 \quad \longrightarrow$

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = f_{\alpha_2, \alpha_1}(\vec{k}_2, \vec{k}_1)$$

Photonen haben **symmetrische Wellenfunktionen** bei Vertauschung aller Koordinaten (hier Impuls und Polarisation) wie alle Teilchen mit ganzzahligem Spin  $\longrightarrow$   
Photonen sind Bosonen ( $\leftarrow$  Spin-Statistik-Theorem)

bisher freies elektromagnetisches Feld betrachtet:

Photonen ohne Wechselwirkung mit Materie können weder emittiert noch absorbiert werden

klassisch:  $\square A^\mu = \frac{j^\mu}{c} \quad \leftarrow$  Wechselwirkung

auch Materieteilchen müssen durch QFT beschrieben werden  $\longrightarrow$   
 benötigen zuerst relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung

#### IV.4 Relativistische Quantenmechanik

Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen (ohne Potenzial)

**ab jetzt alles in Einheiten von  $\hbar, c$ , also " $\hbar = c = 1$ "**

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi = -\frac{1}{2m} \Delta \psi \quad [= \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi]$$

relativistische Form der Energie:  $\vec{p}^2/2m \longrightarrow E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$

Wurzel eines Differenzialoperators ergibt keine sinnvolle Gleichung

Schrödinger (1926): Iteration als Ausweg

$$i \frac{\partial}{\partial t} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^2 \psi = (m^2 - \Delta) \psi$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 \right) \psi = (\square + m^2) \psi = 0$$

#### Klein-Gordon-Gleichung

$m \neq 0$  : Wellengleichung für massive Bosonen (z.B. Higgs-Boson mit Spin 0)

$m = 0$  : Feldgleichung für elm. Feld (Potenzial)  $A_\mu(x)$

Klein-Gordon-Gleichung	$\longrightarrow$	Yukawa-Potenzial	$\frac{\exp(-r/R)}{r} = \frac{\exp(-mr)}{r}$
Wellengleichung	$\longrightarrow$	Coulomb-Potenzial	$\frac{1}{r}$

Austausch eines massiven Bosons führt im nichtrelativistischen Grenzfall (nur dann ist Potenzialbegriff sinnvoll) auf kurzreichweitiges Yukawa-Potenzial

## Dirac-Gleichung

relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger-G. für Teilchen mit Spin 1/2

Dirac (1928): Versuch einer relativistischen Feldgleichung, die wie die Schrödinger-G. eine Diffgl. 1. Ordnung in der Zeit  $t$  ist  $\longrightarrow$  muss wegen Lorentz-Invarianz auch 1. Ordnung in den Ortsvariablen sein

allerdings: nicht möglich für einziges Feld  $\psi(x)$ ; kein Nachteil, da Feld für Teilchen mit Spin 1/2 ohnedies mehr Komponenten haben muss

$x$  steht wie immer für den Raum-Zeit-Vierervektor mit Komponenten  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )  
minimale Möglichkeit (für Masse  $m > 0$ ):

$$\psi_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad \quad \quad 4 \text{ Komponenten}$$

Interpretation: Spin 1/2, Teilchen und Antiteilchen (in QFT)  $\longrightarrow$  4 Komponenten

Dirac-Gleichung ist eine Matrix-Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} \left( i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) &= \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{j=1}^3 \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - m \right) \psi \\ &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \end{aligned}$$

4x4 Matrizen  $\gamma^\mu$ : Dirac-Matrizen ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

Forderung: Lösungen (ebene Wellen) müssen die richtige Beziehung zwischen Energie  $E$  und Impuls  $\vec{k}$  haben  $\longrightarrow$  durch Klein-Gordon-Gleichung gewährleistet

$$-(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = \left[ \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \psi = 0$$

um Klein-Gordon-Gleichung zu erhalten mit  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \longrightarrow$

Clifford-Algebra:  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu =: \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$

wobei  $\mathbb{1}$  Einheitsmatrix im 4-dim. Dirac-Raum

dabei ist  $\eta^{\mu\nu}$  der metrische Tensor der Minkowski-Raum-Zeit mit Diagonalelementen  $(1, -1, -1, -1)$

mögliche (nicht eindeutige) Form der Dirac-Matrizen:

ausgedrückt durch (2-dim.) Pauli-Spin-Matrizen  $\sigma_i$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

Nichtrelativistische Näherung der Dirac-Gleichung

Spin-1/2-Teilchen mit Ladung  $q$  im elektromagnetischen Feld ( $q = -e$  für Elektron)

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0 \quad \text{minimale Substitution (Eichinvarianz!)}$$

mit zeitunabhängigem elm. Feld  $A^\mu(\vec{r}) = (A^0(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}))$  möglicher Ansatz

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-iEt}\psi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \xi(\vec{r}) \\ \eta(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

mit 2-komponentigen Pauli-Wellenfunktionen  $\xi(\vec{r}), \eta(\vec{r}) \quad \longrightarrow$

Schrödinger-Pauli-Gleichung

$$\left[ -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - iq\vec{A})^2 - \frac{q}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + V \right] \xi(\vec{r}) = E_{\text{NR}}\xi(\vec{r})$$

mit Potenzial  $V = qA^0$ , Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  und  $E_{\text{NR}} = E - m$

Spin 1/2 wird durch Matrix  $\vec{\sigma}/2$  dargestellt  $\longrightarrow$

$$\frac{q}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \underbrace{\frac{q}{2m}2}_{\mu} \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B}$$

magnetisches Moment:  $\mu = \frac{q}{2m}g$  mit gyromagnetischem Faktor  $g$

$\longrightarrow$  gyromagnetisches Verhältnis:  $g = 2$  für Dirac-Teilchen ( $\rightarrow$  Zeeman-Effekt)

Exp.:  $g_e = 2 \times 1.00115965218073(28)$

$g_\mu = 2 \times 1.00116592080(63)$

anomales magnetisches Moment  $a = (g - 2)/2$  durch QFT erklärt

allgemeine Lösung der freien Dirac-Gleichung

vollständiges System von Lösungen (ebene Wellen)

$$\psi_\alpha(x) = w_\alpha(p)e^{-iEt+i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad \alpha = 1, \dots, 4$$

Klein-Gordon-Gleichung erfüllt  $\longrightarrow$  Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$

für vollständiges System beiderlei Vorzeichen von  $E$  notwendig

$E > 0$ :  $w =: u(p, s)$  mit  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p, s) = 0$

$E < 0$ :  $w =: v(p, s)$  mit  $(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p, s) = 0$

$v(p, s)$ : beschreibt Antiteilchen in der QFT

“Löcher” in der 1-Teilchen-Theorie ( $\rightarrow$  Bändermodell des Festkörpers)

## IV.5 QED

Quantisierung des Dirac-Feldes: offensichtliche Unterschiede zu Bose-Feldern

- Elektronen genügen Fermi-Statistik ( $\rightarrow$  Pauli-Verbot)
- Ladung in der Dirac-Theorie  $Q = \int d^3r \psi^\dagger \psi = \int d^3r \psi_\alpha^* \psi_\alpha$  scheint positiv definit zu sein, soll aber  $e^-$  und  $e^+$  beschreiben

Fourierzerlegung analog zum elektromagnetischen Feld  $\vec{A}(x)$ :

$$\psi(x) = \int d\mu(k) \sum_{\pm s} \left\{ b(k, s) u(k, s) e^{-ik \cdot x} + d^\dagger(k, s) v(k, s) e^{ik \cdot x} \right\}$$

$$k \cdot x = \omega(k)t - \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \omega(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Unterschied zum elm. Feld: Teilchen  $\neq$  Antiteilchen  $\leftrightarrow \psi^\dagger \neq \psi$

QFT:  $\psi$  und daher  $b(k, s), d^\dagger(k, s)$  Feldoperatoren  $\longrightarrow$

Hamilton-Operator  $H$ , Impulsoperator  $\vec{P}$  und Ladungsoperator  $Q$

$$H = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \omega(k) \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) - d(k, s) d^\dagger(k, s) \right]$$

$$\vec{P} = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \vec{k} \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) - d(k, s) d^\dagger(k, s) \right]$$

$$Q = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) + d(k, s) d^\dagger(k, s) \right]$$

Problem für normale Vertauschungsrelationen der Operatoren  $b, d \longrightarrow$

$H$  nicht nach unten beschränkt, dagegen  $Q$  positiv definit (immer in Einheiten von  $e$ )

Ausweg (auch Kausalität verlangt diese Lösung): Antivertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \{b(k, s), b^\dagger(k', s')\} &:= b(k, s) b^\dagger(k', s') + b^\dagger(k', s') b(k, s) = \{d(k, s), d^\dagger(k', s')\} \\ &= (2\pi)^3 2\omega(k) \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden

Folgerung:  $H$  jetzt positiv definit,  $Q$  beiderlei Vorzeichen möglich

$$H = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \omega(k) \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) + d^\dagger(k, s) d(k, s) \right]$$

$$\vec{P} = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \vec{k} \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) + d^\dagger(k, s) d(k, s) \right]$$

$$Q = \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \left[ b^\dagger(k, s) b(k, s) - d^\dagger(k, s) d(k, s) \right]$$

ab hier völlig analog zum Bose-Fall für elm. Feld  $\vec{A}$

Zustand niedrigster Energie  $\equiv$  Vakuum  $|0\rangle$ :

$$b(k, s)|0\rangle = d(k, s)|0\rangle = 0 \quad \longrightarrow \quad H|0\rangle = 0, \quad Q|0\rangle = 0, \quad \vec{P}|0\rangle = 0$$

1-Teilchen-Zustand

$$|T; k, s\rangle := b^\dagger(k, s)|0\rangle$$

$$H|T; k, s\rangle = \omega(k)|T; k, s\rangle$$

$$\vec{P}|T; k, s\rangle = \vec{k}|T; k, s\rangle$$

$$Q|T; k, s\rangle = |T; k, s\rangle$$

1-Antiteilchen-Zustand

$$|A; k, s\rangle := d^\dagger(k, s)|0\rangle$$

$$H|A; k, s\rangle = \omega(k)|A; k, s\rangle$$

$$\vec{P}|A; k, s\rangle = \vec{k}|A; k, s\rangle$$

$$Q|A; k, s\rangle = -|A; k, s\rangle$$

allgemeiner 2-Elektron-Zustand (analog für 2 Positronen):

$$|e^- e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_1, s_2} \int d\mu(k_1) d\mu(k_2) f_{s_1, s_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) b^\dagger(k_1, s_1) b^\dagger(k_2, s_2) |0\rangle$$

wegen Antivertauschungsrelation  $\{b^\dagger(k_1, s_1), b^\dagger(k_2, s_2)\} = 0 \quad \longrightarrow$

$$f_{s_1, s_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = -f_{s_2, s_1}(\vec{k}_2, \vec{k}_1)$$

Elektronen haben **antisymmetrische Wellenfunktionen** bei Vertauschung aller Koordinaten (hier Impuls und Spinrichtung) wie alle Teilchen mit halbzahligem Spin  $\longrightarrow$

Elektronen sind Fermionen ( $\leftarrow$  Spin-Statistik-Theorem)

$\longrightarrow$  Pauli-Verbot: Fermionen können nicht denselben 1-Teilchen-Zustand besetzen (für  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2, s_1 = s_2 \rightarrow f_{s_1, s_1}(\vec{k}_1, \vec{k}_1) = 0$ )

Hamilton-Operator der QED (noch ohne Wechselwirkung)

$$H_{\text{QED}}^0 = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) |\vec{k}| a_\alpha^\dagger(k) a_\alpha(k) \quad \text{Photonen}$$

$$+ \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} [b^\dagger(k, s) b(k, s) + d^\dagger(k, s) d(k, s)] \quad \text{Elektronen, Positronen}$$

für Wechselwirkung notwendig:  $H_{\text{QED}}$  muss höhere als bilineare Terme in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren enthalten

vorteilhaft für Formulierung einer relativistischen QFT:

Lagrangedichte-Operator statt Hamilton-Operator

Wirkung ( $\Phi$  steht für  $A^\mu, \psi$ )

Mechanik, QM

$$S = \int dt L(q, \dot{q})$$

Feldtheorie, QFT

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi/\partial x^\mu) = \int dt d^3r \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi/\partial x^\mu)$$

Hauptvorteile:

- i.  $\mathcal{L}$  Lorentz-Skalar wie die Wirkung  $S$  (stimmt nicht für  $H$ )
- ii. viele Eigenschaften der Theorie, insbesondere Symmetrieeigenschaften leichter aus  $\mathcal{L}$  ablesbar als aus den Feldgleichungen selbst

allgemeine Struktur der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi/\partial x^\mu) = \mathcal{L}_0 + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{WW}}}_{\text{Wechselwirkung}}$$

freie (oder auch kinetische) Lagrangedichte der QED folgt aus  $H_{\text{QED}}^0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}}^0 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger\gamma^0 \quad \text{adjungierter Spinor - Operator} \end{aligned}$$

Kriterien zur Bestimmung von  $\mathcal{L}_{\text{WW}}$

- klassisches Korrespondenzprinzip  $\rightarrow$  für QED erfolgreich  
nicht anwendbar für Kernkräfte
- Symmetrieprinzipien: Lorentz-Invarianz, diskrete Symmetrien  $P, C, T$   
innere Symmetrien: Isospin,  $SU(3), \dots$
- Analogieargumente: Erfolg der QED führt letzten Endes zur

### Eichtheorie aller fundamentalen Wechselwirkungen

klassische Elektrodynamik:  $\mathcal{L}_{\text{WW}} = -j_\mu A^\mu$  mit Stromdichtevektor  $j^\mu = (\rho, \vec{j}) \rightarrow$   
Maxwell-Gleichungen (in Lorenz-Eichung):  $\square A^\mu = j^\mu$

gesucht für QED: Feldoperator  $j^\mu$ , der  $e^-$  und  $e^+$  beschreibt

Kriterien: i. Lorentz-Vektor  
ii. Stromerhaltung (=Kontinuitätsgleichung):  $\partial_\mu j^\mu = \partial\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Lösung:  $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad q_{e^-} = -e$

Lagrangedichte der QED

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi \end{aligned}$$

Bezeichnung:  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  kovariante Ableitung (minimale Substitution!)

Feldgleichungen nicht exakt lösbar  $\rightarrow$  Störungstheorie in Potenzen von  $e$



~ Störungstheorie in Potenzen der Feinstrukturkonstante  $\alpha$

Welche Größen sind von Interesse?

Anfangszustand ( $t \rightarrow -\infty$ ): keine Wechselwirkung, freie Teilchen

$$\text{z.B. Compton-Streuung: } |p, s; q, \alpha; \text{in}\rangle = b^\dagger(p, s) a_\alpha^\dagger(q) |0\rangle$$

Endzustand ( $t \rightarrow \infty$ ): wieder freie Teilchen, da weit voneinander entfernt

$$\text{Compton-Streuung: } |p', s'; q', \alpha'; \text{out}\rangle = b^\dagger(p', s') a_{\alpha'}^\dagger(q') |0\rangle$$

gesucht: Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass Anfangszustand in gewünschten Endzustand übergeht

S-Matrix (Streumatrix) Heisenberg 1942

$$S(\text{out}; \text{in}) = \langle p', s'; q', \alpha'; \text{out} | p, s; q, \alpha; \text{in} \rangle$$

Übergangswahrscheinlichkeit =  $|S(\text{out}; \text{in})|^2 \longrightarrow$

Wirkungsquerschnitte  $\sigma$ , Zerfallsraten  $\Gamma \sim |S(\text{out}; \text{in})|^2$

Erhaltung der Wahrscheinlichkeit  $\leftrightarrow$  S-Matrix ist unitär

### Störungstheorie

Konstruktion der S-Matrix-Elemente in systematischer Entwicklung nach Potenzen von  $e$   
komplizierte Prozedur durch Feynman-Diagramme veranschaulicht

#### 1. Ordnung Störungstheorie

$$S(\text{out}; \text{in}) \sim \langle \text{in} | e \underbrace{\overline{\psi(x)} \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x)}_{\mathcal{L}_{\text{WW}}} | \text{in} \rangle$$

$\psi, A^\mu$  freie Felder  $\longrightarrow$  durch  $a, b, d$  ausdrücken

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} \sim e(\bar{u}b^\dagger + \bar{v}d)\gamma^\mu(bu + d^\dagger v)(\varepsilon_\mu a + \varepsilon_\mu^* a^\dagger)$$

8 Produkte von Operatoren: jeweils 2 Fermionen, 1 Photon

Beispiele:

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- : \quad e\varepsilon_\mu \bar{u} \langle e^- | b^\dagger \gamma^\mu b a | e^- \gamma \rangle u \sim e\varepsilon_\mu \bar{u} \gamma^\mu u$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma : \quad e\varepsilon_\mu^* \bar{v} \langle \gamma | d \gamma^\mu b a^\dagger | e^+ e^- \rangle u \sim e\varepsilon_\mu^* \bar{v} \gamma^\mu u$$

allerdings: Energie-Impuls-Erhaltung gestattet keine physikalischen Prozesse 1. Ordnung

## 2. Ordnung Störungstheorie

2 Wechselwirkungspunkte:  $S(\text{out}; \text{in}) \sim \langle \text{in} | \mathcal{L}_{\text{WW}}(x) \mathcal{L}_{\text{WW}}(y) | \text{in} \rangle$

→ i.a. mehr Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren als Teilchen im Anfangs- und Endzustand → Propagation virtueller Teilchen zwischen Vertizes, z.B.

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \qquad \qquad \qquad \gamma \gamma \rightarrow e^+ e^-$$

### Compton-Streuung: $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

$$S(\text{out}; \text{in}) \sim e^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma \sim |S(\text{out}; \text{in})|^2 \sim e^4 \sim \alpha^2$$

Laborsystem ( $\omega = |\vec{q}|, \omega' = |\vec{q}'|$ ): Energie-Impuls-Erhaltung

$$(\omega, \vec{q}) + (m_e, \vec{0}) = (\omega', \vec{q}') + (\sqrt{\vec{p}'^2 + m_e^2}, \vec{p}')$$

$$\longrightarrow \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_e}(1 - \cos \theta_L)}$$

→ differentieller Wirkungsquerschnitt für unpolarisiertes Licht (Klein, Nishina, 1929)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{1}{2\pi \sin \theta_L} \frac{d\sigma}{d\theta_L} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta_L \right]$$

integrierter Wirkungsquerschnitt:  $\sigma = \int d\Omega_L \frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \sigma(\omega/m_e)$

Grenzfall niedriger Photonenergie:  $\omega \ll m_e \quad \longrightarrow \quad \sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} = \sigma_{\text{Thomson}}$

$$z \ll 1 : \quad \frac{\sigma}{\sigma_{\text{T}}} = 1 - 2z + O(z^2)$$

$$z \gg 1 : \quad \frac{\sigma}{\sigma_{\text{T}}} = \frac{3}{8z} [\log(2z) + 1/2 + O(\log z/z)]$$

Hochenergielimes

gute Übereinstimmung mit dem Experiment; bei genauen Messungen allerdings kleine Abweichungen → Korrekturen höherer Ordnung in  $\alpha$

bisher betrachtet:

Bornsche Näherung  $\simeq$  Baum-Diagramme  $\simeq$  semiklassische Näherung

Korrekturen höherer Ordnung: Schleifendiagramme

1-Schleifen-Diagramm für Compton-Streuung (Beispiel)

Störungstheorie  $\simeq$  Entwicklung nach Anzahl der Schleifen  
 systematische QFT-Korrekturen: Amplitude  $\sim \hbar^L$  für L Schleifen

Paradebeispiel: Schwinger-Korrektur zum anomalen magnetischen Moment der Leptonen

$$a = (g - 2)/2 = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001161$$

Schwinger 1948

aktueller Stand der Theorie (2008): inklusive 4-Schleifen-Beiträge  $\sim \alpha^4$

für Myon auch Beiträge der starken und schwachen Wechselwirkungen

	$a_e$	$a_\mu$
Exp.	0.00115965218073(28)	0.00116592080(63)
Theorie	0.00115965218279(771)	0.00116591803(56)

→ Triumph für QFT, für störungstheoretische Behandlung im besonderen

Problem der Schleifendiagramme: Amplituden i.a. divergent

physikalischer Grund: unrealistische Annahme, dass Theorie selbst bei kleinsten Distanzen ( $\simeq$  höchsten Energien) ungeändert bleibt →

Ultraviolettdivergenzen in Impulsintegrationen für Schleifendiagramme

Ausweg: Theorie bei kleinen Distanzen modifizieren → Regularisierung  
 (z.B. maximaler Impuls  $|k| < \Lambda$ )

scheinbarer Nachteil: Ergebnis von dieser (a priori willkürlichen) Prozedur abhängig?

Renormierungsprogramm der QFT

unbekannte Struktur bei kleinsten Distanzen kann immer in Kopplungskonstanten und Massen gesteckt werden, die im Rahmen der Theorie nicht berechenbar sind, aber experimentell bestimmt werden können

allgemeine QFT: in jeder Ordnung Störungstheorie kommen neue Kopplungskonstanten ins Spiel  $\rightarrow$  eingeschränkte Vorhersagekraft

Klasse der renormierbaren QFT: keine neuen Konstanten, sondern nur Umdefinition ( $\simeq$  Renormierung) der ursprünglichen Konstanten

Paradebeispiel einer renormierbaren QFT: QED  $\rightarrow$   
alle Effekte bei kleinsten Distanzen können in  $e$  und  $m$  gesteckt werden

diese Größen müssen durch physikalische Observable definiert werden:

Masse	Messung von $E, \vec{p}$ $\rightarrow$ $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$
Ladung	$\lim_{E_\gamma \rightarrow 0} \sigma(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = \frac{8\pi}{3m_e^2} \alpha^2 \rightarrow e = \sqrt{4\pi\alpha}$

Konsequenz: alle anderen physikalischen Größen (Amplituden) durch die so definierte Ladung  $e$  und Masse  $m$  eindeutig bestimmt, unabhängig vom gewählten Regularisierungsverfahren

$\rightarrow$  renormierbare QFT haben maximale Vorhersagekraft

wichtige Erkenntnis Anfang '70: Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkungen ist renormierbar ('t Hooft, Veltman, Nobelpreis 1999)

# V Symmetrien

## V.1 Klassische Mechanik und Quantenmechanik

Symmetrien der klassischen Mechanik

$$t \rightarrow t', \quad q_i(t) \rightarrow q'_i(t')$$

Symmetrietransformation lässt Bewegungsgleichungen ungeändert, d.h. sie schauen in den gestrichenen Größen genauso aus wie in den ungestrichenen

Noether-Theorem

(kontinuierliche) Symmetrien  $\longrightarrow$  Erhaltungsgrößen (zeitlich konstant)

$\rightarrow$  10 Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik:

Energie (1), Impuls (3), Drehimpuls (3), Schwerpunkt (3)

Symmetrien in der Quantenmechanik

jeder Symmetrie entspricht ein hermitescher Operator  $A$ , der mit dem Hamilton-Operator  $H$  vertauscht ( $[A, H] = 0$ )

Beh.: Eigenwerte von  $A$  sind Erhaltungsgrößen

$$\text{wenn } A|\psi(0)\rangle = a_\psi|\psi(0)\rangle \quad \longrightarrow \quad A|\psi(t)\rangle = a_\psi|\psi(t)\rangle \text{ für alle Zeiten } t$$

Bew.:

$$\begin{aligned} A|\psi(t)\rangle &= A \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle = \exp(-iHt)A|\psi(0)\rangle \\ &= a_\psi \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle = a_\psi|\psi(t)\rangle \end{aligned}$$

Konsequenz: Eigenzustand eines Symmetrieoperators bleibt Eigenzustand für alle Zeiten

Beispiele:  $A = H, \vec{L}^2$

2 neue Aspekte in der QM:

i. auch diskrete Symmetrietransformationen können zu Erhaltungsgrößen führen

$$\text{Bsp.: Raumspiegelung} \quad \vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \quad t \text{ ungeändert} \quad \longrightarrow$$

$$\exists \text{ Paritäts-Operator } P \text{ mit } [H, P] = 0 \text{ und } P^2 = 1 \quad \longrightarrow$$

Eigenwerte von  $P$  sind  $\pm 1$ : Zustände positiver oder negativer Parität  
Energieniveaus (Atomphysik) nach Parität klassifizierbar

ii. Entartung von Energieniveaus

Symmetrioperationen vertauschen i.a. nicht (nichtabelsche Symmetriegruppen)

Beispiel: Drehung um  $x$ -Achse, gefolgt von Drehung um  $y$ -Achse verschieden von  
Drehung zuerst um  $y$ -, dann um  $x$ -Achse

→ Drehimpulsoperatoren  $J_i$  vertauschen nicht

Symmetrie

Drehgruppe  $SU(2)$

$$[H, J_i] = 0$$

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

wichtige Eigenschaft: alle Zustände, die durch Anwendung der Drehimpulsoperatoren auseinander hervorgehen, haben dieselbe Energie (“Entartung”)

Terminologie: Zustände bilden eine irreduzible Darstellung der betreffenden Gruppe

$SU(2)$ : zu jedem Drehimpuls  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  gibt es  $2j + 1$  Zustände (magnetische Quantenzahl  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ ) → alle solchen irreduziblen Darstellungen sind offenbar in der Natur realisiert

Zeeman-Effekt: durch Anlegen eines Magnetfeldes wird die Entartung aufgehoben und die  $2j + 1$  Zustände haben verschiedene Energien

Erkenntnis: oft sind leicht gebrochene Symmetrien im Spektrum leichter zu erkennen als exakte Symmetrien; in diesem Fall wird die Rotationsinvarianz durch die Richtung des angelegten Magnetfeldes gebrochen → Aufspaltung der Energieniveaus

## V.2 Klassische Feldtheorie und QFT

Mechanik: dynamische Objekte sind Punktteilchen, durch  $q_i(t)$  beschrieben → Symmetrietransformationen sind immer Raum-Zeit-Transformationen

Feldtheorie: Raum-Zeit **und** Felder können transformiert werden

Noether-Theorem in der Feldtheorie:

zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gibt es einen erhaltenen Strom (Kontinuitätsgleichung)

$$J^\mu(x) \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu(x) = 0$$

zu jedem erhaltenen Strom gibt es eine zeitunabhängige Ladung  $Q$ :

$$Q = \int d^3r J^0(x) \quad \xrightarrow{\partial_\mu J^\mu = 0} \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

QFT:

bis auf wenige Ausnahmen (Anomalien) gelten die klassischen Symmetrien auch in der QFT mit Operatoren  $J^\mu, Q$ :

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad [H, Q] = 0 \quad \longrightarrow \quad [S, Q] = 0$$

dabei ist  $S$  der S-Operator, dessen Matrixelemente Streu- und Zerfallsamplituden sind

Klassifizierung

Raum-Zeit-Symmetrien: 10 Poincaré-Transformationen

innere Symmetrien: nur Felder werden transformiert, Raum-Zeit ungeändert

### V.3 Symmetrien der Teilchenphysik

Poincaré-Transformationen:

Raum-Zeit-Translationen (4)	→	Energie-, Impulserhaltung
Lorentz-Transformationen (6)	→	relativistische Verallgemeinerung von Drehimpuls- und Schwerpunktserhaltung

außerdem: diskrete Raum-Zeit-Transformationen

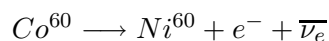
Parität	$P$	$t' = t, \vec{r}' = -\vec{r}$
Zeitspiegelung	$T$	$t' = -t, \vec{r}' = \vec{r}$

bis 1956:  $P$  und  $T$  als universelle Symmetrien der fundamentalen Wechselwirkungen angesehen

Auswirkung von $P, T$ auf dynamische Größen
---

Observable		$P$	$T$
Impuls	$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
Drehimpuls	$\vec{J}$	$\vec{J}$	$-\vec{J}$
longitudinale Polarisation	$\vec{J} \cdot \vec{p}$	$-\vec{J} \cdot \vec{p}$	$\vec{J} \cdot \vec{p}$
elektrisches Feld	$\vec{E}$	$-\vec{E}$	$\vec{E}$
elektrisches Dipolmoment	$\vec{J} \cdot \vec{E}$	$-\vec{J} \cdot \vec{E}$	$-\vec{J} \cdot \vec{E}$

Wu et al. (1957):  $P$ -Verletzung im  $\beta$ -Zerfall von polarisiertem Kobalt



Spin von  $Co^{60}$ :  $\vec{J}$ , Elektron-Impuls:  $\vec{p}_e$

$P$ -Erhaltung → Mittelwert der longitudinalen Polarisation verschwindet, da

$$\langle \vec{J} \cdot \vec{p}_e \rangle = -\langle \vec{J} \cdot \vec{p}_e \rangle = 0$$

Experiment:  $\vec{p}_e$  bevorzugt antiparallel zu  $\vec{J}$ , d.h.  $\langle \vec{J} \cdot \vec{p}_e \rangle < 0$

Folgerung: schwache Wechselwirkung verletzt Parität

$T$ -Invarianz
----------------

bis 1999 kein direkter Hinweis auf  $T$ -Verletzung, z.B. bis heute keine elektrischen Dipolmomente von Elementarteilchen gefunden

indirekte Evidenz aufgrund des

$CPT$ -Theorem (Pauli, Lüders, Zumino)
--

jede (lokale) QFT, die unter normalen Lorentz-Transformationen invariant ist (also ohne  $P$ - und  $T$ -Transformationen), ist auch unter der Kombination  $CPT$  invariant

$C$  ist die Ladungskonjugation: vertauscht Teilchen und Antiteilchen,  
lässt Impuls und Spin ungeändert

wichtige Konsequenzen des  $CPT$ -Theorems:

Teilchen und Antiteilchen haben gleiche Massen und Lebensdauern

Christenson, Cronin, Fitch, Turlay (1964):

in Zerfällen des neutralen  $K^0$ -Mesons  $CP$ -Verletzung festgestellt  $\xrightarrow{CPT}$   $T$ -Verletzung  
inzwischen auch direkt gemessen (CERN-CPLEAR, 1999)

$CP$ -Verletzung: wesentlich kleiner als  $P$ -Verletzung, Gegenstand intensiver exp. und  
theor. Forschung, zunächst nur im  $K^0 - \bar{K}^0$ -System beobachtet,  
inzwischen auch im  $B^0 - \bar{B}^0$ -System (neutrale Teilchen mit Bottom-Quark)

### Innere Symmetrien

$U(1)$ -Symmetrien: einparametrische (abelsche) Symmetrien

QED:  $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)$  Parameter  $\alpha$  reell

$\mathcal{L}_{\text{QED}}$  invariant  $\rightarrow$  erhaltener Strom  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow$

Ladungserhaltung:  $[H, Q] = 0$ ,  $Q = \int d^3r \bar{\psi}\gamma^0\psi$

alle additiven Quantenzahlen entsprechen  $U(1)$ -Symmetrien, insbesondere  $Q, B, L$

$U(1)$  als abelsche Symmetrie hat keine Auswirkung auf Teilchenspektren

Regelmäßigkeiten aber sowohl im Spektrum als auch in Teilchenreaktionen zu beobachten

$\rightarrow$  nichtabelsche innere Symmetrien

fast entartete Gruppen (vgl. Zeeman-Effekt!)

von 1,2,3,... Zuständen:

Singletts, Dubletts, Tripletts,... (analog Spin)

Symmetriegruppe  $SU(2)$  der starken Ww.

Isospin (Heisenberg 1932)

heutiges Verständnis:  $m_u \simeq m_d$

Gell-Mann, Neeman (1961): Hinweise auf (stark) gebrochene größere Symmetrie als Isospin

$\rightarrow SU(3)$  ("eightfold way")

wäre exakte Symmetrie für  $m_u = m_d = m_s$ , tatsächlich stark gebrochen wegen  $m_s \gg m_u$



## V.4 Eichsymmetrien

Isospin,  $SU(3)$ : globale innere Symmetrien, Transformation unabhängig von  $x$

Eichsymmetrien: Transformationen hängen von Raum-Zeit-Variable  $x$  ab

betrachten wieder die Lagrangedichte der QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi} [i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \psi$$

die lokale (Eich-)Transformation (voriges  $\alpha = e\Lambda$  genannt)

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)$$

scheint zunächst keine Symmetrie zu sein, da  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  geändert wird

Grund: die Ableitung von  $\psi(x)$  transformiert nicht wie  $\psi(x)$  selbst,

da Transformationsparameter  $\Lambda(x)$  von  $x$  abhängt

allerdings: wie schon aus der Maxwell-Theorie bekannt, transformiert auch

das Potential  $A^\mu(x)$  unter Eichtransformationen

in relativistischer Notation

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{\partial\Lambda(x)}{dx_\mu}$$

leicht zu überprüfen (kovariante Ableitung!):

$$(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x) \longrightarrow (\partial_\mu - ieA'_\mu(x))\psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x)$$

und damit bleibt  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  tatsächlich ungeändert (da auch  $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$  eichinvariant)

QED ist eine Eichtheorie mit Eichgruppe  $U(1)$

Yang, Mills (1954): auch nichtabelsche Symmetrien ( $SU(2), SU(3), \dots$ )

können Eichsymmetrien sein

Rezept: zu jedem Parameter einer Eichgruppe (entspricht jeweils einer Noether-Ladung)

$\exists$  masseloses Vektorfeld  $\equiv$  Eichfeld

bis Mitte 60 scheinbar theoretische Spielerei, da außer dem elektromagnetischen Feld keine masselosen Vektorfelder bekannt

Grund für Masselosigkeit der Eichfelder: Masse verletzt Eichinvarianz

Bsp.: Massenterm für Photon in  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  nicht invariant unter Eichtransformationen

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = \frac{M_\gamma^2}{2} A^\mu A_\mu \xrightarrow{\text{Eichtr.}} \frac{M_\gamma^2}{2} (A^\mu + \partial^\mu \Lambda)(A_\mu + \partial_\mu \Lambda)$$

## V.5 Spontane Symmetriebrechung

Symmetrien bisher immer im Sinne von Wigner-Weyl realisiert:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \text{ invariant} && \leftrightarrow && [H, Q] = 0 \\ \longrightarrow & \text{additive Quantenzahlen} && && (\text{abelsche Symmetrien}) \\ \longrightarrow & \text{Energieentartung} && && (\text{nichtabelsche Symmetrien}) \end{aligned}$$

dabei stillschweigend vorausgesetzt:

Grundzustand (Vakuum) bleibt bei Symmetrietransformationen ungeändert

Physik kennt viele Beispiele einer anderen Realisierung (Nambu-Goldstone):

$$\begin{aligned} & [H, Q] = 0, \text{ aber Grundzustand nicht invariant} \\ \longrightarrow & \text{keine Entartung von Spektren} \end{aligned}$$

Klassische Beispiele in der Festkörperphysik

### i. Kristall

Grundgleichung (letzten Endes QED) sicher invariant unter beliebigen räumlichen Verschiebungen, aber Kristall nur invariant bei Verschiebungen um Gittervektoren

Sprechweise: die kontinuierliche Gruppe der Translationen wird im Kristall auf die diskrete Untergruppe der Gittertranslationen spontan gebrochen

“spontan”: kein bevorzugter Wert für Gitterpunkte in den Grundgleichungen

### ii. Ferromagnet

Gleichungen rotationsinvariant (keine Richtung ausgezeichnet)  $\longrightarrow [H, \vec{J}] = 0$ ,  
aber für  $T < T_c$  (kritische oder Sprungtemperatur) zeichnet Grundzustand “spontan”  
eine gewisse Richtung aus, in der sich die Spins ausrichten

jede Richtung gleich gut  $\leftrightarrow$  Drehinvarianz der Grundgleichungen

Goldstone-Theorem (1961)

in einer relativistischen QFT gibt es zu jeder spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie ein masseloses Teilchen mit Spin 0: Goldstone-Boson

$$\text{QFT: Energie } \omega(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \xrightarrow{m=0} |\vec{k}| \xrightarrow{\vec{k} \rightarrow 0} 0$$

Analogon in der Festkörperphysik:

$\exists$  stets Anregungen, deren Frequenz für  $\vec{k} \rightarrow 0$  (also Wellenlänge  $\lambda \rightarrow \infty$ ) verschwindet

i. Kristall: mit  $s$  Atomen in der so genannten primitiven Einheitszelle gibt es

$3s - 3$  optische Phononen

3 akustische Phononen mit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega(k) = 0$$

Dispersionskurven  $\omega(k)$

ii. Ferromagnet

Grundzustand

Anregungen :

Spinwellen (Magnonen)

$$\lambda \rightarrow \infty$$

wegen Rotationsinvarianz des Ferromagneten muss der Zustand für  $\lambda \rightarrow \infty$  dieselbe Energie wie der Ausgangszustand haben  $\longrightarrow$  Anregungsenergie verschwindet in der Tat für  $\lambda \rightarrow \infty$

analog im Kristall: akustisches Phonon mit  $\lambda \rightarrow \infty$  entspricht einer Translation  $\longrightarrow$  Anregungsenergie verschwindet wegen Translationsinvarianz der QED

### Teilchenphysik

keine Goldstone-Bosonen, also masselose Teilchen mit Spin 0, bekannt insbesondere scheinbar keine Beziehung zu Eichtheorien

## VI Elektroschwache Wechselwirkung

### VI.1 V-A-Theorie der schwachen Wechselwirkung

Universalität der schwachen Wechselwirkung:

alle Materieteilchen (Leptonen und Hadronen) davon betroffen

Fermi-Theorie des  $\beta$ -Zerfalls (1934):

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^{CC,\mu} J_\mu^{CC\dagger}$$

$P$ -Verletzung  $\rightarrow J_\mu^{CC}$  kein reiner Vektorstrom (wie in QED und wie zunächst bei Fermi), sondern Mischung aus Vektor- und Axialvektorstrom;  $CC$  steht für charged current (geladener Strom), nicht hermitesch (wieder anders als in der QED)

V - A - Theorie

Feynman, Gell-Mann; Marshak, Sudarshan (1958)

$$J_\mu^{CC}(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{\nu_l}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_l(x) + \text{Quark - Anteil}$$

Bem.: mit  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  transformiert  $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$  wie ein Axialvektor

$G_F = 1.16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  ist die Fermi-Kopplungskonstante, die bestimmt wird aus dem

Myon-Zerfall  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$

Zerfallsbreite  $\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e)$  fixiert  $G_F$ , dann ist die differentielle Zerfallsrate nach der Elektronenenergie  $d\Gamma/dE_e$  vollständig bestimmt  $\rightarrow$  gute Übereinstimmung mit dem Experiment, allerdings Korrekturen höherer Ordnung nicht berechenbar

V - A-Theorie auch für hadronische Zerfälle erfolgreich, etwa den Pionzerfall  $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$  und natürlich für den  $\beta$ -Zerfall  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

Unitaritätsproblem der V - A-Theorie

Streuprozess analog zum  $\mu$ -Zerfall:  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$

im Schwerpunktsystem und für  $E_e + E_{\nu_\mu} \gg m_\mu$ :

$$\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) \simeq \frac{2}{\pi} G_F^2 (E_e + E_{\nu_\mu})^2$$

wegen der Struktur der V - A-Theorie (punktförmige Kopplung von 4 Fermionen) erfolgt die Streuung nur in der s-Welle ( $l = 0$ )

Unitarität der S-Matrix ( $\leftrightarrow$  Erhaltung der Wahrscheinlichkeit)  $\rightarrow$

$$\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e)(l = 0) \leq \frac{4\pi}{(E_e + E_{\nu_\mu})^2} \simeq \frac{\pi}{E_e^2}$$

→  $V - A$ -Theorie inkonsistent für  $E_e > \sqrt{\pi/(2\sqrt{2}G_F)}$  →  
 Unitaritätsschranke  $E_e < 310 \text{ GeV}$

offensichtlicher Ausweg: höhere Ordnungen Störungstheorie produzieren auch  $l > 0$

**aber:** höhere Ordnungen nicht berechenbar ( $V - A$ -Theorie nichtrenormierbar)

Yukawa (1935): Analogie zur QED heranziehen

$$\mathcal{L}_{WW}^{\text{QED}} = e\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e A_\mu \qquad \mathcal{L}_{WW}^{V-A} = g_W\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi_l W_\mu^+ + \text{h.c.}$$

für  $E \ll 300 \text{ GeV}$  äquivalent zur  $V - A$ -Theorie mit  $g_W^2/M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$

naheliegende Vermutung (Vereinheitlichung!):  $g_W \simeq e$  →

$$M_W^2 \simeq \frac{4\pi\alpha\sqrt{2}}{G_F} \quad \rightarrow \quad M_W \simeq 105 \text{ GeV} \quad (\text{Exp. : } M_W = 80.4 \text{ GeV})$$

Argumente gegen Vereinheitlichung

- i. Reichweite: Photon masselos,  $W$ -Boson massiv
- ii. Parität: erhalten in QED, verletzt in der schwachen Wechselwirkung
- iii. Einführung der  $W$ -Boson-Felder erzeugt neues Unitaritätsproblem, z.B. im Streuprozess  $WW \rightarrow WW$

Forderung (nicht der historische Weg!): Unitarität gilt für alle Prozesse (in niedrigster Ordnung Störungstheorie) → Wechselwirkung zwischen  $W^\pm$  und Materie (Leptonen, Quarks) muss die Struktur einer nichtabelschen Eichtheorie haben → garantiert zugleich die Renormierbarkeit der zugehörigen QFT ('t Hooft, Veltman, Nobelpreis 1999)

Eichtheorien unterscheiden auf natürliche Weise zwischen links- und rechtshändigen Fermionen: rechtshändige Fermionen spüren die schwache Wechselwirkung nicht

→ Paritätsverletzung

Hauptproblem bleibt aber bestehen:  $M_\gamma = 0$ ,  $M_W \simeq 80 \text{ GeV}$

– widerspricht Idee der Symmetrie zwischen  $\gamma$  und  $W$

– Eichinvarianz →  $M_W = 0$

scheinbare theoretische Sackgasse:

entweder Eichinvarianz →  $M_W = 0$

oder  $M_W \neq 0$  → Symmetrie gebrochen

## VI.2 Spontane Brechung von Eichsymmetrien

spontane Brechung globaler (Nichteich-)Symmetrien: Feldgleichungen und Wirkung invariant, aber Invarianz nicht im Spektrum zu sehen  $\longrightarrow$  masselose Goldstone-Bosonen

entscheidende Analogie: Supraleiter

$T < T_c$ : Gleichstromwiderstand  $\simeq 0$ , Erklärung durch die

### B(ardeen)C(ooper)S(chrieffer)-Theorie (1957)

in gewissen Metallen (und Legierungen) deformiert ein Elektron das Ionengitter, 2. Elektron nützt diese Deformation aus, um seine Energie zu senken  $\longrightarrow$  entspricht einer anziehenden  $e^-e^-$ -Wechselwirkung: (nichtlokale) Cooper-Paare mit Gesamtdrehimpuls  $J = 0$   $\longrightarrow$  Cooper-Paare verhalten sich wie Bosonen mit Ladung  $-2e$

$T \ll T_c$ : alle Cooper-Paare im Grundzustand (Bose-Einstein-Kondensation)  $\longrightarrow$   
Grundzustand hat negative Ladung  $\longrightarrow$

spontane Brechung der elektromagnetischen Eichinvarianz

weiterer Hinweis: Meißner-Effekt

elm. Felder niedriger Frequenz können im Supraleiter nicht existieren:  $\omega > \omega_0$  notwendig, insbesondere kein statisches ( $\omega = 0$ ) Magnetfeld  $\vec{B}$  im Supraleiter möglich

relativistisch:  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \geq m$   $\longrightarrow$  massives Photon mit Masse  $\omega_0 = m$  ?

phänomenologische Beschreibung: Ginzburg-Landau-Modell des Supraleiters

Cooper-Paare durch (nichtrelativistisches) Bose-Feld  $\Phi$  beschrieben

Potential für dieses Feld hat Minimum bei  $\Phi \neq 0$   $\longrightarrow$  entspricht nichtverschwindender Dichte der Cooper-Paare im Grundzustand  $\longrightarrow$  spontane Symmetriebrechung

die scheinbare Masse des Photons (nur innerhalb des Supraleiters, außerhalb natürlich masselos) zeigt sich in der Eindringtiefe des Magnetfelds im Supraleiter  $\sim$  Comptonwellenlänge der Photonmasse

Interpretation: massives Photon mit Spin 1 hat 3 Freiheitsgrade  $\longrightarrow$

Bose-Feld  $\Phi$  hat sich in ein longitudinales Photon "verwandelt"

wichtig: Eichinvarianz nur scheinbar gebrochen, Grundgleichungen und der Hamilton-Operator sind vollkommen eichinvariant!

Teilchenphysik: dem Ginzburg-Landau-Feld  $\Phi$  entspricht das Higgs-Feld  $\longrightarrow$

entscheidender Input, um Masse der  $W^-$  und  $Z$ -Bosonen zu erklären  $\longrightarrow$

elektroschwache Wechselwirkung wird durch eine spontan gebrochene Eichtheorie beschrieben

## VI.3 Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung

Eichbosonen  $W^+, W^-, \gamma$   $\longrightarrow$  Eichsymmetrie muss mindestens 3 Ladungen haben (entsprechen 3 erhaltenen Noether-Strömen)

da  $W^\pm$  elektrisch geladen  $\longrightarrow [Q_{W^\pm}, Q_{\text{elm}}] \neq 0 \longrightarrow$

Eichgruppe der elektroschwachen Wechselwirkungen ist nichtabelsch

einzigste solche Gruppe mit 3 Ladungen (Generatoren) ist die  $SU(2)$ , diese Wahl ist aber nicht verträglich mit den bekannten Leptonen und Quarks  $\rightarrow$  (mindestens) 4 Ladungen

eindeutige Eichgruppe mit 4 Generatoren:  $SU(2) \times U(1) \rightarrow$  4 Eichfelder  $W^+, W^-, W^0, B$

Standard-Modell (Glashow, Salam, Weinberg; Nobelpreis 1979)

die 2 ungeladenen Eichfelder  $W^0, B$  entsprechen noch nicht den physikalischen Teilchen

Grund: spontane Symmetriebrechung  $\longrightarrow$  Unterschied zum Supraleiter

Supraleiter: Eichgruppe  $U(1)_{\text{elm}}$  vollständig gebrochen

Standardmodell: Eichgruppe  $SU(2) \times U(1) \longrightarrow U(1)_{\text{elm}}$

da Photon masselos bleiben muss  $\longrightarrow$  Photonfeld  $A_\mu$  und  $Z$ -Boson-Feld  $Z_\mu$

sind (orthogonale) Mischungen der  $W^0, B$

schwacher Mischungswinkel  $\theta_W$

$\theta_W \neq 0 \longrightarrow M_Z \neq M_W$

entscheidende Vorhersage:

zusätzlich zur  $V - A$ -Wechselwirkung ( $W^\pm$ -Austausch) gibt es weitere Art der schwachen Wechselwirkung, die durch  $Z$ -Austausch vermittelt wird ("neutrale schwache Ströme")  
überraschende Vorhersage, da bis Anfang 70 keine solchen Effekte beobachtet, z.B.  $\longrightarrow$

$$E \ll M_Z$$

$\longrightarrow$  neutrale Ströme sollten sich auch bei niedrigen Energien manifestieren

CERN (1973): exp. Nachweis der Reaktion  $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$ , ein Jahr darauf auch

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

Messung der Wirkungsquerschnitte  $\longrightarrow \sin^2 \theta_W \simeq 0.23 \longrightarrow$

	Exp.
$M_W = \left( \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \right)^{1/2} \simeq 78 \text{ GeV}$	80.403(29) GeV
$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \simeq 89 \text{ GeV}$	91.1876(21) GeV

Unterschied zwischen Vorhersage und experimentellen Werten für  $M_W, M_Z$  durch Korrekturen höherer Ordnung (Schleifen-Diagramme!) vollständig erklärt  $\longrightarrow$  experimentelle Entdeckung der  $W, Z$ -Bosonen (CERN, 1983) großer Triumph der theoretischen Teilchenphysik!

$W, Z$  äußerst kurzlebig, nur über Zerfälle nachweisbar  
 "unsichtbare" Zerfälle des  $Z$ -Bosons  $\longrightarrow$  Anzahl der leichten Neutrinos (Kap. II)

spontane Symmetriebrechung (Higgs-Kibble-Mechanismus):

$$SU(2) \times U(1) \longrightarrow U(1)_{\text{elm}}$$

Analogon des Cooper-Paar-Feldes  $\Phi$  sind 4 skalare Feldkomponenten, davon werden 3 zu longitudinalen Komponenten von  $W^+, W^-, Z$   $\longrightarrow$  eine Komponente bleibt als beobachtbares skalares, neutrales Teilchen übrig: Higgs-Boson ( $\rightarrow$  VI.4)

Leptonen und Quarks im Standard-Modell

Eichfelder wechselwirken i.a. verschieden mit links- und rechtshändigen Fermionen

$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$	linkshändig	Spin antiparallel zum Impuls
$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$	rechtshändig	Spin parallel zum Impuls

$V - A$ -Struktur der geladenen Ströme  $\longrightarrow$  nur  $\psi_L$  wechselwirken mit  $W^\pm$  ( $P$ -Verletzung!)  
 $\longrightarrow$  verschiedenes Transformationsverhalten unter der Eichgruppe  $SU(2)$

Dubletts	Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$
	Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$
Singletts	Leptonen	$e_R^-$	$\mu_R^-$	$\tau_R^-$
	Quarks	$u_R, d_R$	$c_R, s_R$	$t_R, b_R$

Symmetrie zwischen Leptonen und Quarks mit Ausnahme der rechtshändigen Neutrinos:

ungeladen	$\longrightarrow$	keine elektromagnetische Wechselwirkung
$SU(2)$ -Singletts	$\longrightarrow$	keine schwache Wechselwirkung

entkoppeln rechtshändige Neutrinos vom Rest der Welt? Nicht unbedingt, da auch



Wechselwirkung der Fermionen mit dem Higgs-Feld

allgemeine Struktur der Wechselwirkung mit Skalarfeld  $\Phi$

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi\Phi} = -g_\psi (\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) \Phi$$

spontane Symmetriebrechung:  $\Phi(x) = v + H(x)$

Konstante  $v$ : entspricht Dichte der Cooper-Paare im Supraleiter

Feld  $H$ : physikalisches (Higgs-)Feld

$$\begin{aligned} \longrightarrow \mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi\Phi} &= -g_\psi v (\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) + \dots \\ &= -g_\psi v \bar{\psi}\psi + \dots \end{aligned}$$

Vergleich mit Massenterm der Elektronen in der QED  $\longrightarrow$

wie  $W, Z$  erhalten auch Fermionen Masse  $m_\psi = g_\psi v$  durch spontane Symmetriebrechung  
dafür ist notwendig, dass sowohl  $\psi_L$  als auch  $\psi_R$  existieren

Wahl des Standardmodells (natürlich durch Experiment nahegelegt):

keine rechtshändigen Neutrinos  $\longrightarrow$  Neutrinos masselos und separate Erhaltung der Leptonzahlen  $L_e, L_\mu, L_\tau$

neueste Entwicklungen:

Hinweise auf Neutrino-Oszillationen  $\longrightarrow$  separate Leptonzahlerhaltung verletzt und mindestens 2 Neutrinomassen  $m_\nu \neq 0$

- Atmosphärische Neutrinos

zu wenig  $\nu_\mu$  gemessen (Kamiokande, Japan)  $\longrightarrow$  Hinweis auf  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$  Oszillationen und Massenunterschied  $\Delta m_\nu^2(\text{atmosph.}) = m_3^2 - m_2^2 \simeq 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  und maximaler Mischung (Mischungswinkel  $\theta_{23} \simeq \pi/4$ )

- Sonnenneutrino Defizit

zu wenig  $\nu_e$  gemessen (seit vielen Jahren, inzwischen durch mehrere Experimente eindeutig nachgewiesen  $\rightarrow$  IX.2)  $\longrightarrow$  wahrscheinlich  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$  Oszillationen mit Massenunterschied  $\Delta m_\nu^2(\text{solar}) = m_2^2 - m_1^2 \simeq 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$  und nichtmaximaler Mischung (Mischungswinkel  $\theta_{12}$  mit  $\sin^2 \theta_{12} \simeq 0.31$ )

1. klarer Hinweis auf Unvollständigkeit des Standardmodells

## VI.4 Higgs-Boson

einziges noch nicht entdecktes Teilchen im Standardmodell

zunächst 4 skalare Felder (komplexes Dublett)  $\longrightarrow$  3 Freiheitsgrade werden zu longitudinalen Komponenten von  $W^\pm, Z$  (Higgs-Kibble-Mechanismus)

restliches (neutrales) Feld  $\Phi_0$  spürt Potential, dessen Minimum einem Vakuumerwartungswert  $v \neq 0$  entspricht:

$$\Phi_0(x) = v + H(x)$$

wie beim Supraleiter führt  $v \neq 0$  zu Massen von  $W, Z$ -Bosonen (vgl. Abschnitt VI.3)

$$\longrightarrow v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_F}} \quad \longrightarrow \quad v = 246 \text{ GeV} \quad (\text{Fermi} - \text{Skala})$$

Masse des Higgs-Bosons  $H$  ist im Standardmodell nicht eingeschränkt

andererseits: Kopplung von  $H$  an Fermionen (und Eichfelder) genau vorhergesagt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -g_\psi(v + H)\bar{\psi}\psi \quad \longrightarrow \quad m_\psi = g_\psi v \\ &= -m_\psi\bar{\psi}\psi - m_\psi(G_F\sqrt{2})^{1/2}\bar{\psi}\psi H \end{aligned}$$

Kopplungsstärke von  $H$  an  $\psi \sim m_\psi$  (analog für  $W, Z$ )  $\longrightarrow$

Higgs-Boson zerfällt mit Vorliebe in schwere Teilchen (daher besonders schwer nachweisbar)

LEP (bis 2001):  $M_H > 114 \text{ GeV}$  (95% Wahrscheinlichkeit)

QFT: schwere Teilchen beeinflussen Messungen auch indirekt als virtuelle Teilchen in Korrekturen höherer Ordnung

Vergleich Theorie-Experiment (vor allem der LEP-Daten): da  $M_H$  einziger unbekannter Parameter im Standardmodell  $\longrightarrow M_H < 144 \text{ GeV}$ , daher insgesamt

$$114 \text{ GeV} < M_H < 144 \text{ GeV} \quad (95\% \text{ Wahrscheinlichkeit})$$

Untersuchung des Higgs-Mechanismus ist die Hauptaufgabe des L(arge)H(adron)C(ollider) (CERN, ab 2008)

Möglichkeit: analog wie beim Supraleiter Higgs-Feld nicht unbedingt fundamentales Feld, sondern Bindungszustand anderer Teilchen ( $\sim$  Cooper-Paare)?

## VII Vom Quarkmodell zur Quantenchromodynamik

### VII.1 Quarkmodell

Gell-Mann, Zweig (1963): alle Hadronen können als Bindungszustände von 3 Quarks  $u, d, s$  verstanden werden

#### Mesonen $\bar{q}q$

pseudoskalare Mesonen (Spins von  $q, \bar{q}$  antiparallel)  $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta, \eta'$

Vektormesonen (Spins von  $q, \bar{q}$  parallel)  $\rho^\pm, \rho^0, K^{*\pm}, K^{*0}, \bar{K}^{*0}, \omega, \phi$

#### Baryonen $qqq$

Spin-1/2-Oktett (enthält  $p, n$ )

Spin-3/2-Dekuplett

Quarkmodell sehr erfolgreich für Klassifizierung und Spektren der Hadronen, auch Parität und Isospin richtig erklärt

merkwürdige Ladungen:  $Q_u = 2e/3, Q_d = Q_s = -e/3$

bis Anfang 70 als rein mathematische Konstruktionen betrachtet (Gell-Mann), bis heute kein direkter experimenteller Nachweis (Confinement)

Experimente am SLAC (ab 1968): körnige Struktur der Nukleonen in  $e^-N$ -Streuprozessen bei hohen Energien und Transversalimpulsen  $\longrightarrow$

tief inelastische Lepton-Nukleon-Streuung (später auch mit Myonen und Neutrinos)

für  $E_l, |\Delta E_l| \gg m_N$ : Streuung an scheinbar freien Bestandteilen der Nukleonen (Feynman: Partonen; analog Rutherford-Streuung) Friedman, Kendall, Taylor (Nobelpreis 1990)

offensichtliche Kandidaten für Partonen: Quarks  $\longrightarrow$  Quark-Parton-Modell

allerdings: aus Energie-Impuls-Bilanz  $\longrightarrow$  muss noch weitere Konstituenten der Nukleonen geben, die allerdings weder elektromagnetische noch schwache Wechselwirkungen spüren

Vermutung: ungeladene Partonen sind der "Leim" (glue), der die Quarks zusammenhält  $\longrightarrow$

Gluonen

## VII.2 Probleme des einfachen Quarkmodells

### i. Asymptotische Freiheit und infrarote Sklaverei

was hält Quarks zusammen, wenn sie sich bei hohen Energien scheinbar wie freie Teilchen verhalten  $\rightarrow$  ungewöhnliche Art der Wechselwirkung notwendig, sicher nicht wie QED

### ii. Trialitätsproblem

Mesonen  $\bar{q}q$ :  $3 \times 3 = 9$  gebundene Zustände  $\rightarrow$  offenbar Anziehung zwischen **allen**  $q$  und  $\bar{q}$   
 Baryonen  $qqq$ : warum gibt es dann keine Bindungszustände  $qqq\bar{q}$  (drittelzahlige Ladung!), wenn  $\bar{q}$  von allen  $q$  angezogen wird?

### iii. Spin-Statistik-Problem

Baryon  $\Delta^{++} = \{u \uparrow, u \uparrow, u \uparrow\}$  mit  $J = 3/2, Q = 2e$  (Bestandteil des Dekupletts)

3 identische Fermionen  $u \uparrow$  für Zustand mit  $S_z = 3/2 \rightarrow$  müsste wegen Fermi-Statistik total antisymmetrische Ortswellenfunktion haben  $\rightarrow$  sehr merkwürdig, da in der QM alle "vernünftigen" Potenziale im Grundzustand symmetrische Ortswellenfunktion haben

Ausweg für ii. und iii.:  $\exists$  zusätzlicher Freiheitsgrad = "Farbe", in dem  $\Delta^{++}$  total antisymmetrisch ist (verallgemeinertes Pauli-Prinzip erfüllt)  $\rightarrow$  muss mindestens 3 Farben geben  
 löst auch Trialitätsproblem: von  $9 \times 9 = 81$  (für 3 Farben) möglichen Bindungszuständen sind nur 9 tatsächlich gebunden!

Weitere Hinweise für Farbfreiheitsgrad

### iv. Konsistenzbedingung für elektroschwache Eichtheorie

Anomaliefreiheit verlangt 3 Farben für die Quarks

### v. $e^+ + e^- \rightarrow$ Hadronen

für inklusive Streuung (alle möglichen hadronischen Endzustände) sollte Wirkungsquerschnitt unabhängig davon sein, wie die Quarks zu Hadronen werden  $\rightarrow$  für  $E_{e^+e^-} \gg 1$  GeV

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_i Q_i^2/e^2$$

$3 < E_{e^+e^-} < 10$  GeV: Paare von  $u, d, s, c$ -Quarks produziert  $\rightarrow$

$$\sum_i Q_i^2/e^2 = 3 \left( 2 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} \right) = \frac{10}{3}$$

$E_{e^+e^-} \gg 10$  GeV: Paare von  $u, d, s, c, b$ -Quarks produziert  $\rightarrow$

$$\sum_i Q_i^2/e^2 = 3 \left( 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{9} \right) = \frac{11}{3}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment (Faktor 3 wegen Farbe)

vi.  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{Hadronen}$

beide Prozesse brauchen 3 Farben, um experimentelle Resultate zu verstehen

$$\boxed{\longrightarrow N_c = 3 \text{ Farben}}$$

### VII.3 Quantenchromodynamik

3 Farben legen Eichgruppe  $SU(3)$  nahe

$$\text{Quarks: Farbtripletts } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad q = u, d, c, s, t, b$$

Leptonen: Farbsingletts (spüren keine starke Wechselwirkung)

Eichprinzip: Ausgangspunkt freie Lagrangedichte der Quarks

$$\mathcal{L}_{\text{Quark}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q$$

elektromagnetische Wechselwirkung der Quarks

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iQ_q A_\mu \\ \longrightarrow \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iQ_q A_\mu) - m_q)q \end{aligned}$$

einzigste Wechselwirkung mit

$$\text{Vertex } \gamma^\mu Q_q = \frac{2e}{3}\gamma^\mu \text{ oder } \frac{-e}{3}\gamma^\mu$$

Photon ist ungeladen  $\leftrightarrow$  abelsche Eichgruppe  $U(1)$

starke Wechselwirkung von Quarks und Gluonen

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 \frac{\lambda_\alpha}{2} G_\mu^\alpha$$

mit 8 Gluonfeldern  $G_\mu^\alpha$ ;  $\lambda_\alpha$ : 3-dim. Analogon der Pauli-Matrizen

$$\boxed{\text{Lagrangedichte der QCD}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 G_{\mu\nu}^\alpha G^{\alpha,\mu\nu} + \sum_q \bar{q}_i (i\gamma^\mu D_{\mu,ij} - m_q \delta_{ij}) q_j$$

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha - g_s f_{\alpha\beta\gamma} G_\mu^\beta G_\nu^\gamma, \quad D_{ij}^\mu = \partial^\mu \delta_{ij} + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 \frac{(\lambda_\alpha)_{ij}}{2} G^{\alpha,\mu}$$

$g_s$ : starke Kopplungskonstante;  $f_{\alpha\beta\gamma}$ : Strukturkonstante der  $SU(3)$

$i, j = 1, 2, 3$  Farbindices der Quarks und Gluonen

kompliziertere Wechselwirkung als QED  $\longrightarrow$  mehr Vertices

analog zu elm. Wechselwirkung

wie in QED einzige Kopplungskonstante  $g_s$

$$g_s \frac{(\lambda_\alpha)_{ij}}{2} \gamma^\mu$$

Gluonen farbig  $\leftrightarrow$  nichtabelsche Eichtheorie  $SU(3)_c \leftrightarrow$  Selbstwechselwirkung der Gluonen

$$\sim g_s f_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\sim g_s^2 f_{\alpha\beta\epsilon} f_{\gamma\delta\epsilon}$$

Paradoxon:

QCD hat (außer Quarkmassen) nur eine einzige Kopplungskonstante  $g_s \rightarrow$  sollte sowohl Confinement, also starke Kopplung bei niedrigen Energien, als auch asymptotische Freiheit, also schwache Kopplung bei hohen Energien, erklären  $\longrightarrow$  energieabhängige Kopplungsstärke  $g_s(E)$

diese Energieabhängigkeit gibt es tatsächlich in jeder QFT  $\longrightarrow$

Ladungsabschirmung in der QED

virtuelle  $e^+e^-$ -Paare polarisieren Vakuum

effektive Ladung = Stärke der Wechselwirkung

nimmt mit Abstand ab, wächst mit  $E$ :  $d\alpha/dE > 0$

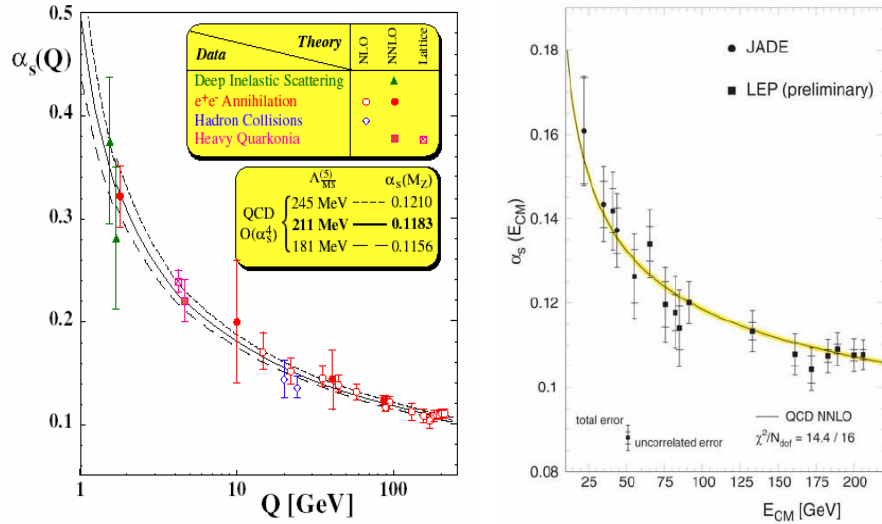
z.B.:  $\alpha(0)^{-1} \simeq 137$ , aber  $\alpha(M_Z)^{-1} \simeq 128$

nichtabelsche Eichtheorie QCD

Abschirmung durch  $q\bar{q}$ -Paare besteht nach wie vor, wird aber durch die farbigen Gluonen (über)kompensiert: für weniger als 16 Quarksorten (tatsächlich  $N_F = 6$  in der Natur) gilt die asymptotische Freiheit:  $\lim_{E \rightarrow \infty} g_s(E) = 0$

in der 1-Schleifen-Näherung (Gross, Politzer, Wilczek, 1973; Nobelpreis 2004)

$$\alpha_s(E) = \frac{g_s^2(E)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2N_F) \ln E^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2}$$



→ dimensionale Transmutation

durch Prozess der Renormierung wird aus dimensionsloser Kopplungskonstante  $g_s$  eine energieabhängige Funktion  $g_s(E)$ , die durch einen dimensionsbehafteten Skalenparameter  $\Lambda_{\text{QCD}}$  gekennzeichnet ist

aktueller Wert (vor allem aus LEP-Daten)

$$\alpha_s(M_Z) = 0.119 \pm 0.002 \quad \longrightarrow \quad \Lambda_{\text{QCD}}^{N_F=5} \simeq 220 \text{ MeV}$$

allerdings: Confinement zwar qualitativ “erklärt”, aber Störungstheorie für  $g_s \gtrsim 1$  nicht anwendbar; weitere starke Hinweise, aber noch kein rigoroser Beweis aus den Feldgleichungen der QCD

Veranschaulichung am Potenzial zwischen Quark und Antiquark

Flusslinien der Gluonfelder  
analog Coulombgesetz

## Gummiband (String)

potenzielle Energie wächst mit dem Abstand  $r$ , irgendwann reicht  $E_{\text{pot}}$  aus, um Hadronen zu erzeugen  $\rightarrow$  Potenzialbild bricht zusammen (Gummiband reißt)  $\rightarrow$  im Experiment als Hadron-Jets (Bündel) zu sehen (z.B. in  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen, siehe Abschnitt III.4)

### aktueller Stand der Teilchenphysik

bei hohen Energien, insbesondere bei LEP, sowohl QCD als auch elektroschwache Theorie eindrucksvoll bestätigt, und zwar inklusive 1-Schleifen-Näherung

Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen					
$SU(3)_c$	$\times SU(2)$	$\times U(1)$	$\rightarrow$	$SU(3)_c$	$\times U(1)_{\text{elm}}$
stark		elektroschwach			spontane Brechung

## VIII Ausblick

2 Richtungen für experimentelle Teilchenphysik

hohe Energien  
neue Freiheitsgrade (Teilchen)

niedrige Energien  
hohe Strahldichten  $\rightarrow$  hohe Präzision  
neue Freiheitsgrade als virtuelle Teilchen

nächste Etappe L(arge)H(adron)C(ollider) am CERN: Proton-Proton-Kollisionen bei maximal 14 TeV; wird Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung enträtseln  $\rightarrow$  entweder fundamentales Higgs-Boson ( $114 \text{ GeV} \lesssim M_H \lesssim 144 \text{ GeV}$ ) oder neue Strukturen bei etwa 1 TeV; Start des LHC im Sommer 2008

theoretische Extrapolation:

große Vereinheitlichung der starken und elektroschwachen Wechselwirkungen G(rand)U(nified)T(theories)
--

$$\begin{matrix} SU(3)_c, SU(2) \\ U(1) \end{matrix}$$

asymptotisch frei  
asymptotisch instabil

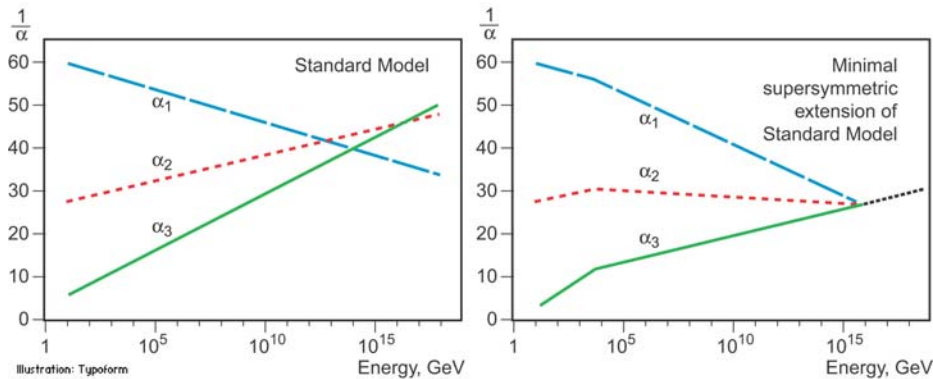
$\alpha_s, \alpha, \sin^2 \theta_W$  bei  $E = M_Z$  sehr genau bekannt  $\rightarrow$

bei bekanntem Teilchenspektrum Entwicklung in der Energie berechenbar

### Attraktivität der GUT

i. nicht nur alle Wechselwirkungen, sondern auch alle Fermionen vereinheitlicht  $\rightarrow$  Quarks und Leptonen in den selben Eichmultipletts; da in jeder Fermionengeneration Summe der Ladungen verschwinden muss (solange GUT auf so genannter einfacher Liegruppe





aufbaut), implizieren GUT die Ladungsquantisierung (Verhältnisse der Quark- und Leptonladungen fixiert)

ii. einzige Kopplungskonstante  $g_{\text{GUT}}$  bei  $E \gtrsim 10^{16}$  GeV, durch spontane Symmetriebrechung

$$G_{\text{GUT}} \longrightarrow SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$$

$\longrightarrow g_s, g_{SU(2)}, g_{U(1)}$  berechenbar bei niedrigen Energien, würde  $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$  “erklären”

fehlender Schnittpunkt der 3 Kopplungen bei hohen Energien  $\longrightarrow$  keine “Wüste” (desert) zwischen  $100$  GeV und  $10^{16}$  GeV, sondern wahrscheinlich neue Freiheitsgrade

Vereinheitlichung scheint zu funktionieren im

$$\underline{\text{M(inimalen)S(upsymmetrischen)S(tandard)M(odell)}}$$

im wesentlichen Verdopplung des Teilchenspektrums, für  $M_Z \lesssim M_{\text{SUSY}} \lesssim 1$  TeV Schnittpunkt der 3 Kopplungen bei etwa  $M_{\text{GUT}} = 10^{16}$  GeV

MSSM: Vorhersage für leichtestes Higgsboson (insgesamt 5 im MSSM)  $M_{\text{Higgs}} \lesssim 135$  GeV, außerdem SUSY-Partner zwischen  $100$  GeV und  $1$  TeV erwartet  $\longrightarrow$  derzeit noch keine Spur, aber LHC müsste diese Teilchen finden

bei  $E \simeq 10^{18}$  GeV: Gravitation vergleichbare Stärke mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen; Quantisierung der Gravitation  $\rightarrow$  Raum-Zeit-Fluktuationen  $\rightarrow$  QFT auf Minkowski-Raum wahrscheinlich nicht mehr sinnvoll

populärste Erweiterung: Superstrings

Eichwechselwirkungen und Gravitation vereint, Teilchen nicht mehr punktartige Objekte, sondern Anregungen von “Saiten  $\equiv$  Strings” mit einer Ausdehnung von  $\sim l_{\text{Planck}} \sim 10^{-35}$  m; nach wie vor sehr spekulativ, keine Verbindung zwischen Theorie und Experiment

## IX Kernphysik und Anwendungen

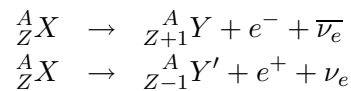
Kernbausteine:  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen in einem Kern mit Massenzahl  $A = Z + N$

Notation:  ${}^A_Z X$  für chemisches Element  $X$ , z.B.  ${}^{12}_6 C$  für Kohlenstoff ( $Z$  wird oft weggelassen)

Kerneigenschaften im Prinzip durch die QCD bestimmt, aber bereits die einfache Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist ein kompliziertes Vielkörper-Problem: mindestens 6 Quarks (und Gluonen)  $\longrightarrow$  nach wie vor keine Ableitung des  $NN$ -Potenzials aus der QCD, geschweige denn der Mehrnukleonen-Wechselwirkung (Kernaufbau)  $\longrightarrow$  Kernphysik durch phänomenologische Modelle gekennzeichnet

Nuklidkarte: systematische Darstellung der bekannten Kerne; mit wachsendem  $A$  zunehmender Neutronenüberschuss

Isobare (selbes  $A$ ) gehen durch  $\beta^-$ - oder  $\beta^+$ -Zerfall ineinander über:



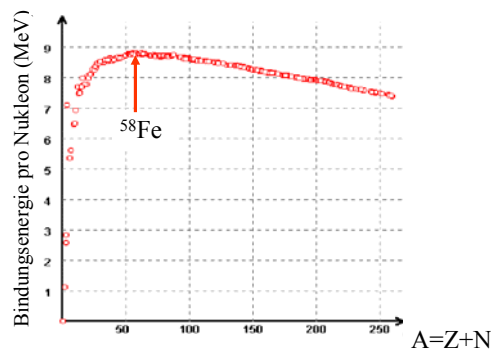
natürliche Radioaktivität: zusätzlich zu  $\beta^-$ -Strahlung (nur künstlich radioaktive Elemente haben auch  $\beta^+$ -Strahlung) noch  $\gamma$ -Strahlung (gleiches  $A$  und  $Z$ : Isobare und Isotope) und



Bindungsenergie (Massendefekt)

um einen Kern in seine Bestandteile zu zerlegen, muss Energie zugeführt werden (Konvention der Kernphysik:  $B > 0$ )

$$B({}^A_Z X) = Zm_p + Nm_n - M({}^A_Z X)$$



Die Bindungsenergie pro Nukleon ist am stärksten für  ${}^{58}\text{Fe}$ . Nukleonen mit kleinerer Massenzahl gewinnen Energie durch Fusion, Nukleonen mit größerer Massenzahl durch Spaltung.

Schlussfolgerungen:

- Kerne mit  $A \sim 60$  (Fe) besonders stabil
- Energiegewinnung entweder aus Spaltung schwerer Kerne (Uran) in 2 Kerne mittlerer Massenzahl oder durch Fusion sehr leichter Kerne (Energieproduktion in Sternen;  ${}^4\text{He}$  besonders stabil:  $B/A = 7$  MeV)

Energiebilanz für Spaltung  $K_A \rightarrow K_{A_1} + K_{A_2}$

$$M_A = Zm_p + Nm_n - B(A) \quad \longrightarrow$$

$$M_A - M_{A_1} - M_{A_2} = B(A_1) + B(A_2) - B(A) > 0 \quad \text{für } A_1, A_2 \gtrsim 60$$

diese Energiedifferenz manifestiert sich als kinetische Energie der Spaltprodukte

- in weitem Bereich  $B/A \simeq 8$  MeV/Nukleon

## IX.1 Bethe-Weizsäcker-Formel

Grundidee: Bindung nur mit nächsten Nachbarn wegen kurzer Reichweite der Kernkräfte, erklärt  $B \sim A$

Tröpfchenmodell des Kerns (Bohr, von Weizsäcker 1935):

Kern als inkompressible Flüssigkeit extrem hoher Dichte

Bethe-Weizsäcker-Formel:

phänomenologisch erfolgreiche Formel für die Bindungsenergie mit 5 Beiträgen

$$B\left(\frac{A}{Z}X\right) = b_V A - b_O A^{2/3} - b_C Z^2 A^{-1/3} - b_A \frac{(Z - N)^2}{A} + \varepsilon_X b_P A^{-1/2}$$

Bestandteile (Koeffizienten durch Fit bestimmt):

1. Volumsenergie (Tröpfchen!):  $b_V = 15.8$  MeV
2. Oberflächenenergie: Nukleonen an Oberfläche schwächer gebunden, Effekt prop. Oberfläche des Kerns  $\sim A^{2/3}$   $b_O = 18.3$  MeV
3. Coulombenergie (Protonen stoßen einander ab):  $b_C = 0.7$  MeV
4. Asymmetrienergie: Überschuss einer Nukleonsorte energetisch ungünstig (Pauli-Prinzip  $\rightarrow$  Erklärung im Thomas-Fermi-Modell des Atomkerns)  $b_A = 23.2$  MeV
5. Paarungsenergie: Kerne mit gepaarten Protonen, bzw. Neutronen sind stärker gebunden als ungepaarte (z.B.  ${}^4_2\text{He}$  besonders stark gebunden)  $b_P = 11.5$  MeV

$$\varepsilon_X = \begin{cases} +1 & \text{gg - Kerne} & Z \text{ und } N \text{ gerade} \\ 0 & \text{gu-, ug - Kerne} & A \text{ ungerade} \\ -1 & \text{uu - Kerne} & Z \text{ und } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

## Modelle des Atomkerns

2 Kategorien von Modellen:

- i. Potenzialmodelle: einzelnes Nukleon in Potenzial betrachtet, das durch alle anderen Nukleonen erzeugt wird  $\rightarrow$  Schalenmodell, Thomas-Fermi-Modell
- ii. Kollektive Modelle: starke Kopplung zwischen Nukleonen berücksichtigt  $\rightarrow$  Tröpfchenmodell, Nilsson-Modell (für deformierte Kerne: Quadrupolmoment  $\neq 0$ )

### IX.2 Schalenmodell

Analogie zur Schalenstruktur der Atomhülle, erklärt die **“magischen”** Nukleonenzahlen, jeweils für Protonen und Neutronen:

$$N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Kerne mit diesen Werten für  $Z$  und/oder  $N$  sind besonders stark gebunden (abgeschlossene Schalen)

Grundidee: ein Nukleon (“Leuchtnukleon”) bewegt sich im mittleren Potenzial der anderen Nukleonen

Wie kommt Potenzial zustande?

2 Nukleonen betrachtet mit kurzreichweitigem Potenzial  $V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

Mittelung über alle Nukleonen im Kern (Dichte  $\rho(\vec{r})$ )

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_1) &= \int d^3r_2 V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2) \simeq (\text{kurze Reichweite}) \rho(\vec{r}_1) \int d^3r_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &\simeq \rho(\vec{r}_1) \int d^3r f(\vec{r}) = C \rho(\vec{r}_1) \end{aligned}$$

$\rightarrow$  mittleres Potenzial  $\sim$  Kerndichte  $\sim$  Ladungsdichte  
(durch Elektron-Kern-Streuexperimente bestimmbar)

Eigenzustände der Schrödingergleichung: jedes vernünftige Kernpotenzial, z.B. Oszillator-plus abstoßendes Coulombpotenzial (für Protonen), führt auf die Besetzungszahlen 2,8,20

entscheidende Verbesserung des Schalenmodells durch Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung (Goeppert-Mayer; Haxel, Jensen, Süss 1949)

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{zentral}}(r) - \frac{K}{r} \left| \frac{dV_{\text{zentral}}(r)}{dr} \right| \vec{L} \cdot \vec{S}$$

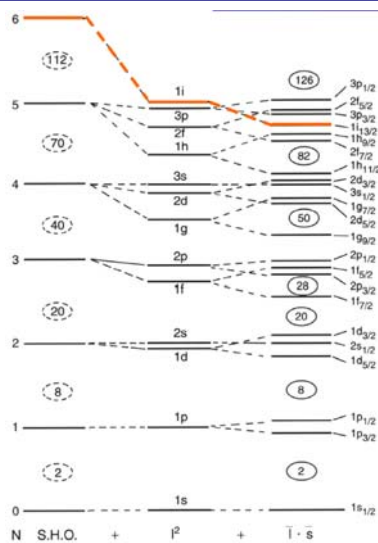
mit positiver Konstante  $K \rightarrow$

Entartung von Zuständen mit denselben Quantenzahlen  $(n, l)$  aufgehoben  $\rightarrow$   
stärkere Bindung, wenn  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  parallel

Termschema des Einteilchen-Schalenmodells erklärt magische Zahlen

weitere Erfolge: Spin und magnetische Momente von Kernen mit voller Schale  $\pm$  ein Nukleon

## LS-Kopplung



### Auswirkungen der Spin-Bahn-Kopplung

- Absenkung der  $j=l+1/2$  Orbitale aus der höheren Oszillatorschale.
- **Reproduktion der magischen Zahlen!**

### Wichtige Konsequenz:

- Abgesenkte Orbitale aus höherer  $N+1$  Schale haben andere Parität als Orbitale der  $N$  Schale.
- Starke WW erhält Parität. Die abgesenkten Orbitale mit anderer Parität sind sehr reine Zustände und mischen nicht innerhalb der Schale.

Beispiel: Spin-Parität

da geschlossene Schale Spin 0,  $P=1 \longrightarrow$  Kern hat Spin-Parität des (fehlenden) "Leuchtnukleons"

Kern	$Z$	$N$	Schalenmodell	$J^P$ (exp.)
$^{17}\text{O}$	8	9	$d_{5/2}$	$5/2^+$
$^{17}\text{F}$	9	8	$d_{5/2}$	$5/2^+$
$^{209}\text{Pb}$	82	127	$g_{9/2}$	$9/2^+$
$^{209}\text{Bi}$	83	126	$h_{9/2}$	$9/2^-$

Modifikationen notwendig für Kerne mit mehr als einem "Leuchtnukleon"

Beispiel: Nukleonen polarisieren innere Schalen  $\longrightarrow$  nichtkugelsymm. Potenzial (z.B. Nilsson-Potenzial)

stark nichtmagische Kerne permanent deformiert  $\longrightarrow$  Konsequenzen:

- große Quadrupolmomente
- Rotationsanregungen: wesentlich kleiner als Oszillatorenergiedifferenzen
- auch Schwingungsspektren wie bei Molekülen beobachtet  $\longrightarrow$  "Kernphononen": kollektive Anregungen des gesamten Kerns; markantes Beispiel Riesen-dipolresonanzen: Protonen und Neutronen schwingen um gemeinsamen Schwerpunkt

### IX.3 Statistisches Modell (Thomas-Fermi)

anderer Extremfall (nur für  $A \gg 1$  sinnvoll):

alle Nukleonen gleichberechtigt im statistischen Modell

Kern als entartetes Fermi-Gas betrachtet  $\longrightarrow$

freie Fermionen in Kugel mit Radius  $R = R_0 A^{1/3}$  ( $R_0 = 1.28 \pm 0.05$  fm)

Potenzialtöpfe für p,n geringfügig verschieden durch Coulombabstoßung der Protonen

Statistische Mechanik ( $T = 0$  angenommen): im Grundzustand alle Zustände bis zur Fermi-Kante ( $p \leq p_F$ ) 2-fach (Spin 1/2) besetzt

qualitatives Argument (mit richtigem Ergebnis): in jedem Phasenraumelement

$$d^3 p d^3 r = h^3$$

dürfen sich nach dem Pauli-Prinzip höchstens 2 Teilchen aufhalten (separat für p und n)

daher im Volumen  $V = 4\pi R_0^3 A/3$  (wieder separat für p und n)

$$n = 2 \frac{4\pi}{3} p_F^3 \frac{V}{h^3} = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

daher

$$p_{F,Z} = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi Z}{4A} \right)^{1/3} \quad p_{F,N} = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi N}{4A} \right)^{1/3}$$

für  $N = Z$ :  $E_F = p_F^2/(2m) \simeq 30$  MeV

mittlere kinetische Energie/Nukleon

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} d^3 p}{\int_0^{p_F} d^3 p} = \frac{3p_F^2}{10m}$$

und daher gesamte mittlere kinetische Energie des Kerns

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{kin}}(Z, N) \rangle &= N \langle E_{\text{kin},N} \rangle + Z \langle E_{\text{kin},Z} \rangle \\ &= \frac{3}{10m} \left( N p_{F,N}^2 + Z p_{F,Z}^2 \right) = \frac{3\hbar^2}{10m R_0^2} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} \end{aligned}$$

Minimum von  $\langle E_{\text{kin}}(Z, N) \rangle$  für festes  $A$  bei  $Z = N = A/2$

Entwicklung um das Minimum in der Differenz  $Z - N$  beginnt mit  $(Z - N)^2$ :

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{kin}}(Z, N) \rangle &= \frac{3\hbar^2}{10m R_0^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left\{ A + \frac{5}{9} \frac{(Z - N)^2}{A} + O[(Z - N)^3] \right\} \\ &= E_{\text{min}} + b_A \frac{(Z - N)^2}{A} \end{aligned}$$

nicht nur richtige Struktur, sondern auch richtige Größenordnung für Koeffizienten  $b_A$  in der Bethe-Weizsäcker-Formel

## IX.4 Kernmaterie

viele Eigenschaften hinreichend schwerer Kerne sind unabhängig von  $A$   
Oberflächen- und Coulombeffekte können zunächst vernachlässigt werden  $\longrightarrow$   
“unendliche Kernmaterie”

theoretische Behandlung (Brueckner 1954-58): statistisches Modell in nullter Näherung, dann  
2-Teilchen-Wechselwirkung, usw. eingeführt

Ergebnis der numerischen Rechnung mit empirischen Potenzialen:

$$b_V = 15.2 \text{ MeV} \quad \text{statt (gefitteten) } 15.8 \text{ MeV}$$

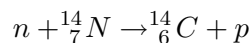
## IX.5 Einige kernphysikalische Anwendungen

neben der Energiegewinnung in Kernkraftwerken (Kernspaltung; in fernerer Zukunft auch  
Kernfusion) Bedeutung vor allem in der physikalischen Messtechnik (Spurenanalyse, Tracer-  
Methoden) und in der Medizin (Krebstherapie mit Hadronen)  $\longrightarrow$

Spezielle Anwendungen

### Datierung mit $^{14}\text{C}$

Alter von (verarbeitetem) Holz über  $^{14}\text{C}$ -Gehalt bestimmbar; dieses radioaktive Isotop wird  
in der Natur durch die kosmische Strahlung in der Atmosphäre erzeugt:



$^{14}_6\text{C}$  reiner  $\beta^-$ -Strahler mit Halbwertszeit  $T_{1/2} = (5730 \pm 40)a$

Gehalt in der Atmosphäre:  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} \simeq 1.5 \cdot 10^{-12}$

lebende Organismen nehmen  $^{14}\text{CO}_2$  in der natürlichen Konzentration auf (Photosynthese),  
nach Absterben nimmt  $^{14}\text{C}$ -Anteil durch radioaktiven Zerfall ab  $\longrightarrow$

Altersbestimmung aus  $^{14}\text{C}$ -Gehalt (Genauigkeit  $\pm 100$  Jahre, bis etwa 20000 Jahre zurück)

Probleme: geringe Aktivität wegen langer Lebensdauer

Verhältnis  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  nicht zeitlich konstant

Eichung durch Vergleich mit Baumringen (Dendrochronologie)

### M(agnet)R(esonanz)T(omographie)

MRT  $\equiv$  Kernspin-Tomographie

alle Fermionen (mit Ausnahme der Neutrinos) haben ein magnetisches Moment  
für Nukleonen

$$\vec{\mu} = g \frac{e\hbar}{2m_p c} \vec{s} = g \mu_K \vec{s}$$

mit Kernmagneton  $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ J T(esla)}^{-1}$

gyromagnetischer Faktor  $g$ :

$$\begin{aligned}g_p &= 5.5856 \quad (\text{Proton}) \\g_n &= -3.8263 \quad (\text{Neutron})\end{aligned}$$

Vergleich:  $|g| = 2 +$  kleine Korrekturen (QFT) für elementare geladene Fermionen ( $e, \mu, \tau$ )

Spins richten sich in einem angelegten Magnetfeld aus (Zeeman-Effekt)  $\longrightarrow$   
für Protonen (Spin 1/2) 2 mögliche Niveaus (Spin parallel oder antiparallel zu  $\vec{B}$ ) mit  
Energiedifferenz

$$\Delta E = 2\mu_p |\vec{B}| = g_p \mu_K B$$

außerdem präzisiert Protonenspin um  $\vec{B}$  mit Larmorfrequenz (hier immer  $\hbar = 1$ )

$$\omega_L = 2\mu_p |\vec{B}| = g_p \mu_K B$$

im Körper (z.B. Gehirn) verteilen sich die Spins im Gleichgewicht nach der Boltzmann-Verteilung (bei Zimmertemperaturen  $T$ )

$$\frac{n_{G(\text{rundzustand})}}{n_{a(\text{negerter Zustand})}} = \exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)$$

MRT: thermisches Gleichgewicht durch Einstrahlung elektromagnetischer Hochfrequenzwellen gestört; im Resonanzfall ist die zugehörige Frequenz  $\omega =$  Larmorfrequenz

$$\omega = \Delta E = g_p \mu_K B$$

durch gepulste HF-Einstrahlung wird erreicht, dass zu einem gewissen Zeitpunkt  $n_G = n_a$  mit Nettomagnetisierung Null (gleich viele Spins hinauf wie hinunter)

nach Abschalten der HF-Strahlung geht Ensemble wieder in den Gleichgewichtszustand über  
 $\longrightarrow$  dabei wird ein HF-Signal mit  $\omega = \omega_L$  ausgestrahlt  $\longrightarrow$  dieses (exponentiell abklingende) Signal ist die Messgröße der MRT

Ortsauflösung  $\sim 1 \text{ mm}^3$  durch entsprechende Gradientenfelder erreicht  $\longrightarrow$   
Bildverarbeitung zu 3D-Bild mit Schnitten in jeder gewünschten Ebene (besonders wichtig in der Tumordiagnostik)

typische Werte: Magnetfeld  $B \sim 1.5 \div 3 \text{ T}$  (1 T =  $10^4$  Gauß)  
Frequenz  $\omega/2\pi = 42.58 \text{ MHz B/T}$  (Radiowellen)

## **P(ositronen)E(missions)T(omographie)**

Patient erhält radioaktiv markierte Chemikalien ( $\beta^+$ -Strahler)  
nach Zerfall des Kerns annihilieren die Positronen mit atomaren Elektronen

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

die beiden (in entgegengesetzte Richtungen) emittierten Photonen werden in Koinzidenz gemessen  $\longrightarrow$  erlaubt Rückschluss auf den Ort, wo sich die Substanz befunden hat  
 $\longrightarrow$  zeitlicher Verlauf des Tracers nachvollziehbar ( $\rightarrow$  Bildverarbeitung, z.B. Stoffwechsel im Gehirn)

gebräuchliche Isotope:  $^{11}\text{C}$ ,  $^{13}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$ ,  $^{18}\text{F}$



## X Nukleare Astrophysik

Kern- und Teilchenphysik spielen zunehmend wichtigere Rolle in der Kosmologie und Astrophysik  $\longrightarrow$  neues Arbeitsgebiet Astroteilchenphysik

(sehr) kurze Geschichte des Universums (Big-Bang-Modell mit Inflation):

- i. Planck-Epoche: charakteristische Zeit  $t_P \sim 10^{-43}$  s, Temperatur  $T_P \sim 10^{19}$  GeV/ $k$  (Boltzmann-Konstante  $k = 8.62 \cdot 10^{-5}$  eV/K)

“Ursuppe”: Plasma relativistischer Teilchen; durch eine Reihe von Phasenübergängen werden manche Teilchen massiv und entkoppeln, wenn

$$\Gamma_{\text{Teilchen}} < H$$

$\Gamma_{\text{Teilchen}}$ : Wechselwirkungsrate des Teilchens (nimmt mit  $T$  ab)

Hubble-Parameter  $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$  mit Skalenparameter  $R(t)$ , der Expansion des Universums beschreibt (Friedmann-Robertson-Walker Universum)

Hubble-Konstante:  $H_0 := H(t_0) = (71 \pm 4)$  km s $^{-1}$  Mpc $^{-1}$ , wobei 1 Mpc (Megaparsec) =  $3.1 \cdot 10^{22}$  m =  $3.26 \cdot 10^6$  Lichtjahre;  $t_0 = (13.7 \pm 0.2) \cdot 10^9 a$  (Zeit seit dem Urknall)

Interpretation: wenn  $\Gamma_{\text{Teilchen}} < H$ , gibt es nicht mehr genug Wechselwirkungen für das Teilchen, um im Gleichgewicht zu sein

- ii. GUT-Phasenübergang:  $t_{\text{GUT}} \sim 10^{-38} - 10^{-34}$  s,  $kT_{\text{GUT}} \sim 10^{16} - 10^{14}$  GeV  
in dieser Periode gewaltiges Aufblähen des Universums ( $R(t) \sim e^{Ht}$ ) in sehr kurzer Zeit:  
inflationäres Universum  $\longrightarrow$  impliziert u.a., dass Energiedichte des Universums

$$\rho(t_0) = \rho_c(t_0) = \frac{3H(t_0)^2}{8\pi G_N} \sim 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$$

W(ilkinson)M(icrowave)A(nisotropy)P(robe)-Experiment:

$$\Omega = \frac{\rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} = 1.02 \pm 0.02$$

- iii. Elektroschwacher Phasenübergang:  $kT_{\text{EW}} \sim 300$  GeV,  $t_{\text{EW}} \sim 10^{-11}$  s

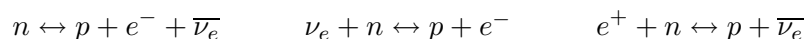
- iv. Confinement-Übergang:  $kT_C \sim 300$  MeV,  $t_C \sim 10^{-5}$  s  
aus Quarks und Gluonen werden Mesonen und Baryonen

nächste interessante Epoche ist die

### X.1 Kosmische (primordiale) Nukleosynthese

Periode:  $kT \sim 10 - 0.1$  MeV,  $t \sim 10^{-2} - 10^2$  s (1 MeV  $\simeq$   $1.2 \cdot 10^{10}$  K)  
frühester direkter Test des Big-Bang-Modells

zu Beginn dieser Epoche sind Neutronen und Protonen im thermischen Gleichgewicht:



im thermischen Gleichgewicht und mit der Wärmetönung  $Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$  gilt für die Teilchendichten  $n_i$  ( $p, n$  sind bereits nichtrelativistisch)

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(\frac{-Q}{kT}\right)$$

Def.: relative Häufigkeit des Kerns mit Massenzahl  $A$

$$X_A := \frac{n_A A}{n_{N(\text{ukleon})}} \quad \longrightarrow \quad \sum_A X_A = 1$$

**Stufe 1:**  $t = 10^{-2} \text{ s}$ ,  $kT = 10 \text{ MeV}$

wegen hoher Entropie des Universums Kerne noch sehr unwahrscheinlich  $\longrightarrow$

$$X_n \simeq X_p \simeq 0.5$$

während

$$X_2(\text{Deuterium}) \sim 6 \cdot 10^{-12}, \quad X_3(\text{Tritium}) \sim 2 \cdot 10^{-23}, \quad X_4(\text{Helium}) \sim 2 \cdot 10^{-34}$$

**Stufe 2:**  $t \sim 1 \text{ s}$ ,  $kT \sim 1 \text{ MeV}$

entscheidendes Ereignis: Neutrinos entkoppeln aus Gleichgewicht

$$\Gamma_\nu \sim G_F^2 (kT)^5 \quad \longrightarrow \quad \frac{\Gamma_\nu}{H} = \left(\frac{kT}{0.8 \text{ MeV}}\right)^3$$

und damit auch die Neutronen  $\longrightarrow$

Verhältnis  $n_n/n_p$  ab jetzt eingefroren, abgesehen vom Neutronzerfall

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(\frac{-Q}{kT}\right) \simeq \frac{1}{6}$$

außerdem nimmt die Neutrinotemperatur ab diesem Zeitpunkt durch die Expansion des Universums wie  $T_\nu \sim R^{-1}$  ab  $\longrightarrow T_\nu(t_0) = 1.96K$

**Stufe 3:**  $t = 1 - 3 \text{ Minuten}$ ,  $kT = 0.3 - 0.1 \text{ MeV}$   
(S. Weinberg, The first 3 minutes)

in dieser Periode können  $D$ ,  $T$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  gebildet werden; wegen der weitaus größten Bindungsenergie enden praktisch alle verfügbaren Neutronen in  ${}^4\text{He}$   
nur wenige Neutronen sind seit der Entkopplung zerfallen  $\longrightarrow$

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq \frac{1}{7} \quad \text{statt} \quad \frac{n_n}{n_p}(\text{Gleichgewicht}) = \frac{1}{6}$$

Anteil an primordialem Helium ist daher

$$X_{{}^4\text{He}} = \frac{4n_4}{n_p + n_n} \simeq \frac{4 \frac{n_n}{2}}{n_p + n_n} = \frac{2 \frac{n_n}{n_p}}{1 + \frac{n_n}{n_p}} \simeq \frac{2/7}{8/7} = 0.25$$

nur ein kleiner Teil von  $D$ ,  ${}^3\text{He}$  wird nicht in  ${}^4\text{He}$  verbrannt

$$\frac{D + {}^3\text{He}}{H} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$$

wichtig: Häufigkeiten von  $D$  und  ${}^4\text{He}$  nur durch primordiale Nukleosynthese zu erklären  $\longrightarrow$   
in ausgezeichneter Übereinstimmung mit Beobachtungen

weitere Konsequenz für Baryondichte im Universum (WMAP):

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_c} \simeq 0.05$$

kosmologische Evidenz für "dunkle Materie", da  $\Omega_{\text{total}} = 1$  im inflationären Universum  
außer  ${}^4\text{He}$  nur mehr kleine Mengen  ${}^7\text{Li}$  primordial produziert

Gründe:

- i. Coulombabstoßung bereits groß für  $kT = 0.1$  MeV
- ii. "Flaschenhals" für primordiale Nukleosynthese: keine stabilen Isotope mit  $A = 5, 8$

$B, Be, {}^6\text{Li}$ : durch kosmische Strahlung produziert

$A \geq 12$ : nur in dichten und heißen Sternen produziert (Abschnitt X.2)

weitere interessante Voraussage der Kosmologie:

wenn mehr als 3 Neutrinosorten, expandiert das Universum rascher  $\rightarrow$  Neutrinos entkoppeln  
früher und daher ist das Verhältnis  $n_n/n_p$  bei der Entkopplung größer  $\rightarrow$  mehr Neutronen  
vorhanden  $\rightarrow$  mehr  ${}^4\text{He}$  produziert

beobachtete Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$   $\longrightarrow N_\nu < 4$

lange vor experimenteller Bestätigung für  $N_\nu = 3$  durch LEP

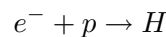
viel später ( $kT \sim 0.3$  eV,  $t \sim 10^{13}$  s  $\sim 300000$  a):

### Photonenentkopplung und Rekombination

Photonen entkoppeln, da Compton-Streuung zu selten wird

ungefähr zur selben Zeit kommt es zur so genannten

Rekombination ( $T$  bereits zu klein für Ionisierung des Wasserstoffatoms)



ab jetzt (analog zu Neutrinos)  $T_\gamma \sim R^{-1}$

$$\frac{T_\gamma(t_0)}{T(t_{\text{Rek}})} = \frac{R(t_{\text{Rek}})}{R(t_0)} \simeq \frac{1}{1300}$$

daher

kosmische Hintergrundstrahlung
--------------------------------

$$T_\gamma(t_0) = T_{3K} = \frac{T(t_{\text{Rek}})}{1300} = \frac{3575 \text{ K}}{1300} \simeq 2.75 \text{ K}$$

genauer Wert:  $T_{3K} = 2.725 \text{ K}$

neuere Entwicklungen: kleine Anisotropien in der Hintergrundstrahlung gemessen (zuletzt durch WMAP-Experiment)

zusammen mit Untersuchungen weit entfernter Supernovas ergibt sich folgende ungefähre Zusammensetzung der Energiedichte des Universums (Werte vom März 2008), immer normiert auf die kritische Dichte  $\rho_c$

Energieform	$\Omega_i$
normale (baryonische) Materie	$0.046 \pm 0.002$
dunkle Materie	$0.23 \pm 0.01$
dunkle Energie	$0.72 \pm 0.02$

dunkle Materie: neben kosmologischer Evidenz vor allem aus Vergleich der sichtbaren und der gravitationellen Masse von Galaxien und Galaxienhaufen; besteht wahrscheinlich aus schwach wechselwirkenden sehr massiven Teilchen (noch kein direkter Hinweis)

dunkle Energie: besonders mysteriöse Komponente, entspricht negativem Druck, der Beschleunigung der Expansion des Universums bewirkt (zuerst durch Messung der Luminosität weit entfernter Supernovas gefunden); möglicherweise durch so genannte kosmologische Konstante in den Einstein-Gleichungen verursacht (Ursprung ebenfalls unklar: natürliche "Vorhersage" der Teilchenphysik für eine solche Vakuumenergie um viele Größenordnungen zu groß)

## X.2 Energieerzeugung in Sternen und solare Neutrinos

Vorschlag schon von Eddington (1920): Energie durch Kernfusion erzeugt

Einwand: Kernreaktionen finden wegen der geringen thermischen Energie der Kerne ( $\sim \text{keV}$ ) und der Coulomb-Barriere nicht statt

tatsächlich nur quantenmechanisch mit Hilfe des Tunneleffekts möglich (Gamow)

Bethe, von Weizsäcker (1938): CNO-Zyklus

dominiert in heißen Sternen ( $T_{\text{Zentrum}} > 2 \cdot 10^7 \text{ K}$ )

in "normalen" Sternen wie der Sonne ( $T_{\text{Zentrum}} \sim 1.56 \cdot 10^7 \text{ K} \simeq 1.3 \text{ keV}$ ) dominiert der

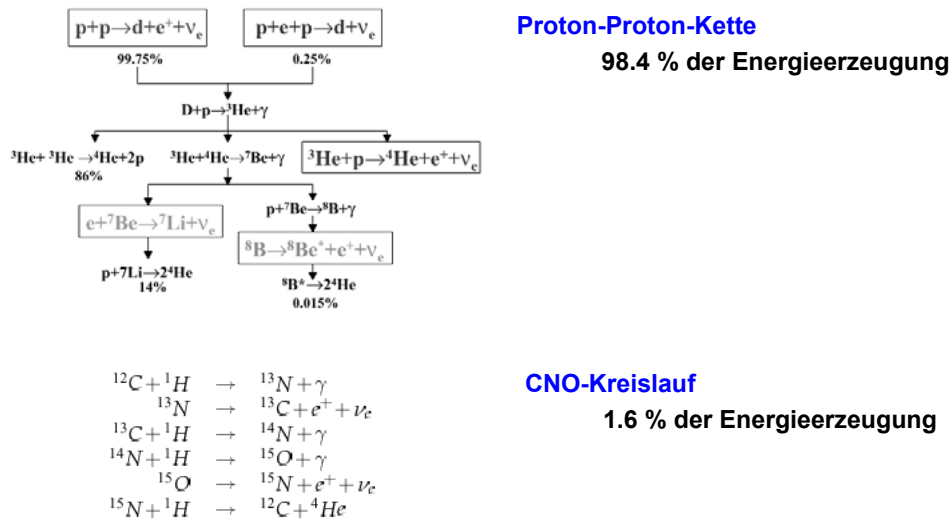
pp-Zyklus
-----------

Zyklus beginnt mit einer Reaktion der schwachen Wechselwirkung, deren Rate die Energiegewinnung im Stern bestimmt; alle folgenden Reaktionen gehen praktisch sofort vor sich insgesamt Fusion von 4 Protonen zu  ${}^4\text{He}$  mit Q-Wert=26.7 MeV: davon heizen 25 MeV den Stern, der Rest wird von Neutrinos abgeführt

S(tandard)S(onnen)M(odell): viele Jahre nicht direkt bestätigt, da Wirkungsquerschnitte des pp-Zyklus nur für  $E_{\text{kin}} \geq 100 \text{ keV}$  im Labor gemessen

## Erzeugung Solarer Neutrinos

H kann auf 2 Arten zu He fusionieren:



neue Entwicklungen der letzten Jahre ermöglicht durch

Neutrino-Astronomie

experimentelle Untersuchung der Sonnenneutrinos

gesamter Neutrinofluss auf Erdoberfläche modellunabhängig (zum Unterschied vom Spektrum)

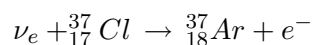
$$\Phi_\nu = 6.67 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

zum Vergleich: gleicher Fluss wie 300 m von typischem KKW (allerdings  $\bar{\nu}_e$ )

Spektrum der Sonnenneutrinos (laut SSM): 3 wesentliche Komponenten

- i.  $pp \rightarrow de^+\nu_e$ : größte Intensität, aber geringste Energie
- ii. 2 diskrete Linien aus  $e^-$ -Einfang von  ${}^7\text{Be}$
- iii. höchste Energien, aber geringste Intensität durch  $\beta^+$ -Zerfall von  ${}^8\text{B}$

erster Nachweis von Sonnenneutrinos: Homestake-Experiment



R. Davis et al. (Nobelpreis 2002)

nur sensitiv auf  ${}^8\text{B}$ -Neutrinos

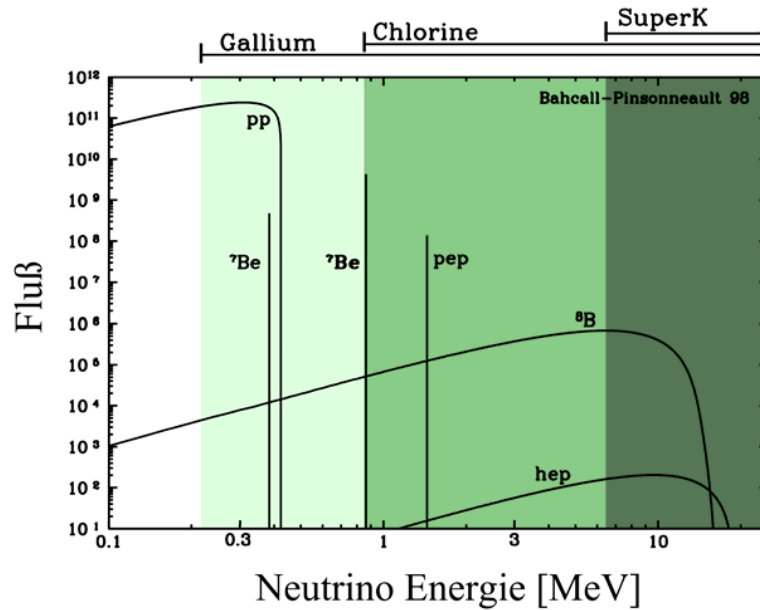


Abb. 1.2: Fluß solarer Neutrinos (Einheit:  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  für monoenergetische Linien, sowie  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{MeV}^{-1}$  für kontinuierliche Spektren) in Abhängigkeit von ihrer Energie nach [Bah98]. Die

spätere Experimente:

- SAGE, Gallex, GNO  $\nu_e + {}_{31}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}_{32}^{71}\text{Ge} + e^-$   
auch pp-Neutrinos nachweisbar
- (Super-)Kamiokande  $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$   
nur sensitiv auf  ${}^8\text{B}$ -Neutrinos, aber Energie und Richtung der Neutrinos (von der Sonne) konnten gemessen werden

Zusammenfassung: alle Experimente beobachten (zum Teil erheblich) weniger Ereignisse als das SSM vorhersagt

im wesentlichen 2 verschiedene Erklärungen:

- SSM ergibt falsches Spektrum: vor allem die Neutrinos von  ${}^8\text{B}$  hängen sehr stark von  $T_{\text{Zentrum}}$  ab, andererseits pp-Zyklus durch die Gallium-Experimente bestätigt auch andere Vorhersagen des SSM (z.B. solare Seismik) inzwischen bestätigt
- Neutrino-Oszillationen:  $\nu_e$  verwandeln sich auf dem Weg vom Sonneninneren zur Erde in andere Neutrinoart(en)

Rätsel gelöst durch Experiment im

S(udbury)N(eutrino)O(bservatory)

Detektor: 1 kt ultrareines  $D_2O$  in 2092 m Tiefe

Vorteil: nicht nur  $\nu_e$  können nachgewiesen werden, sondern alle Neutrinosorten  $\nu_x$ , die an der schwachen Wechselwirkung mittels  $Z$ -Austausch teilnehmen

3 verschiedene Reaktionen werden gemessen

Reaktion	Mechanismus	Bezeichnung
$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p$	W-Austausch	CC
$\nu_x + d \rightarrow \nu_x + p + n$	Z-Austausch	NC
$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	W,Z-Austausch	ES

Interpretation der Ergebnisse (Stand 2007):

- reduzierter Fluss  $\Phi_{\nu_e}$  in CC-Reaktion bestätigt
- totaler Fluss  $\Phi_{\nu}$ , gemessen in NC und ES, ist höher und in Übereinstimmung mit dem SSM
- $\Phi_{\nu_\mu+\nu_\tau} = \Phi_{\nu} - \Phi_{\nu_e}$  ist deutlich von Null verschieden  $\longrightarrow$  klarer Hinweis für Neutrino-Oszillationen
- Nachweis der Neutrino-Umwandlungen ist unabhängig vom SSM
- Neutrino-Oszillationen nur sensitiv auf Differenzen der Quadrate von Neutrinomassen  $\longrightarrow$  für solare Neutrinos

$$\Delta m_{12}^2 \simeq 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 \theta_{12} \simeq 0.31$$

Bestätigung im KAMLAND-Experiment:  $\bar{\nu}_e$ -Fluss von verschiedenen Kernreaktoren in Japan gemessen (durchschnittliche Entfernung 180 km)

- außerdem Neutrino-Oszillationen atmosphärischer Neutrinos in Experimenten in Japan gemessen [(Super-)Kamiokande, K2K]:

$$\Delta m_{23}^2 \simeq 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad \theta_{23} \simeq \pi/4$$

Konsequenz:

3 Neutrinos haben alle verschiedene Massen  
(wie geladene Leptonen und Quarks)  
Standardmodell im engeren Sinn muss erweitert werden !

Folgerung: mindestens 2 Neutrinos sind massiv, aber keine Information über absolute Massen der Neutrinos in Oszillationsexperimenten

kosmologische Schranke (WMAP):  $\sum_{\nu} m_{\nu} < 0.42 \text{ eV}$

terrestrische Experimente (Tritium-Zerfall) in Planung (Sensitivität von 0.2 eV angepeilt)