# Numerische Lösung der 1D-Wellengleichung

Als Beispiel zum Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen behandeln wir die 1D-Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \;=\; c^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}} \tag{1}$$

für $0 < x < L$ und $t > 0$. Das ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (vom hyperbolischen Typ) für die unbekannte Funktion $u(x,t)$. Um eine eindeutige Lösung von (1) zu erhalten, müssen noch zusätzliche Bedingungen vorgegeben sein, z.B.:

$$\left\{\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= g(x) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le L \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad t \ge 0 \tag{3}$$

Mit den *Anfangsbedingungen* (2) und den *Randbedingungen* (3) beschreibt die PDGL (1) die Bewegung einer idealisierten Saite der Länge $L$, die an den Rändern bei $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist und zur Zeit $t = 0$ die Anfangsauslenkung $f(x)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$ hat, Abb. 1. Die Lösungsfunktion $u(x,t)$ ist dann die vertikale Auslenkung der Saite am Ort $x$ zur Zeit $t$ und der Parameter $c$ stellt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung ("Welle") dar.

Zur numerischen Lösung der Wellengleichung (1) müssen sowohl die Zeitvariable $t$ als auch die Ortsvariable $x$ diskretisiert werden, d.h. die Zeit- und Ortsableitungen müssen aus Funktionswerten an vorgegebenen Stützstellen berechnet werden. Diese Vorgangsweise ist natürlich nur eine Approximation, und die Genauigkeit einer Näherungslösung von (1) hängt sowohl vom gewählten Zeitschritt $\Delta t$ als auch von der gewählten Ortsauflösung $\Delta x$ ab. Wir betrachten die Diskretisierung von (1) auf einem *äquidistanten* raum-zeitlichen Gitter mit den Stützstellen

$$\left\{\begin{aligned} x_j &= j \cdot \Delta x \qquad && j = 0, 1, \ldots, N \\ t_n &= n \cdot \Delta t \qquad && n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Für die Approximation der Lösung von (1) am Gitter, $u(x_j, t_n)$, schreiben wir kurz $u_j^n$, wobei sich der untere Index $j$ auf den Ort und der obere Index $n$ auf die Zeit bezieht.

Um eine Näherung für die Ortsableitung $\partial^2 u/\partial x^2$ zu erhalten, betrachten wir folgende Taylor-Entwicklungen von $u$ um einen inneren Gitterpunkt $x_j$:

$$u(x_j + \Delta x) = u(x_j) + \Delta x\, u'(x_j) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x_j) + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x_j) + O((\Delta x)^4)$$

$$u(x_j - \Delta x) = u(x_j) - \Delta x\, u'(x_j) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x_j) - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x_j) + O((\Delta x)^4)$$

Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$u(x_j + \Delta x) + u(x_j - \Delta x) = 2u(x_j) + (\Delta x)^2 u''(x_j) + O((\Delta x)^4)$$

Daraus erhält man als Approximation von $\partial^2 u/\partial x^2$ eine *Zentraldifferenz 2. Ordnung* in $\Delta x$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \tag{5}$$

Analog bekommt man als Näherung von $\partial^2 u/\partial t^2$ eine *Zentraldifferenz 2. Ordnung* in $\Delta t$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2) \tag{6}$$

Einsetzen von (5) und (6) in die Wellengleichung (1) liefert die Diskretisierung

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\left(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}\right) = \frac{c^2}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

und mit der *Courant-Zahl* $\alpha := c\,(\Delta t/\Delta x)$ das Differenzenschema

$$\boxed{u_j^{n+1} = 2\,(1-\alpha^2)\,u_j^n + \alpha^2\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - u_j^{n-1}}\ . \tag{7}$$

(7) ist ein *explizites* Verfahren 2. Ordnung in $\Delta t$ und $\Delta x$. Kennt man die Lösung $u$ für alle inneren Punkte $x_j$ des Ortsgitters zu den Zeiten $t_n$ und $t_{n-1}$, so liefert das Schema (7) eine Näherungslösung $u_j^{n+1}$ für alle inneren Punkte $x_j$ zum nächsten Zeitpunkt $t_{n+1}$, vgl. Abb. 2. Zur Vervollständigung des Differenzenschemas (7) fehlen aber noch die Informationen aus den Anfangs- und Randbedingungen:

$$\begin{array}{llllllll}
(a) & u(x,0) & = & f(x)\,, & 0 \le x \le L: & u_j^0 & = & f(x_j)\,, \quad j = 0,1,\ldots,N \\
(b) & u_t(x,0) & = & g(x)\,, & 0 \le x \le L: & u_t(x_j,0) & = & g(x_j)\,, \quad j = 0,1,\ldots,N \\
(c) & u(0,t) & = & 0\,, & t \ge 0: & u_0^n & = & 0\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \\
(d) & u(L,t) & = & 0\,, & t \ge 0: & u_N^n & = & 0\,, \quad n = 0,1,2,\ldots
\end{array}$$

Da man beim expliziten Verfahren (7) *zwei* Startwerte benötigt, implementiert man die zweite Anfangsbedingung (b) durch Einführen eines fiktiven Zeitschrittes $t_{-1}$:
Verwendet man zur Approximation von $\partial u(x_j,t)/\partial t$ eine Zentraldifferenz 2. Ordnung,

$$\frac{\partial u(x_j,t)}{\partial t} \;=\; \frac{u(x_j,t+\Delta t)-u(x_j,t-\Delta t)}{2\Delta t} \;+\; O((\Delta t)^2)\;,$$

erhält man speziell für $t=0$

$$\left.\frac{\partial u(x_j,t)}{\partial t}\right|_{t=0} \;=\; \frac{u_j^1-u_j^{-1}}{2\Delta t} \;=\; g(x_j)\;,$$

oder

$$u_j^{-1} \;=\; u_j^1 \;-\; 2\,\Delta t\, g(x_j)\;. \tag{8}$$

Für $n=0$ lautet das ursprüngliche Differenzenschema (7):

$$u_j^1 \;=\; 2\,(1-\alpha^2)\,u_j^0+\alpha^2\,(u_{j+1}^0+u_{j-1}^0)-u_j^{-1}\;.$$

Einsetzen von (8) in die letzte Gleichung liefert eine Implementation der zweiten Anfangsbedingung (b) in Form eines speziellen Differenzenschemas für den ersten Zeitschritt $n=1$:

$$\boxed{u_j^1 \;=\; (1-\alpha^2)\,u_j^0+\frac{1}{2}\,\alpha^2\,(u_{j+1}^0+u_{j-1}^0)+\Delta t\, g(x_j)}\;. \tag{9}$$

Die Frage nach der Stabilität des expliziten Verfahrens (7) wird durch die *Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Bedingung* beantwortet: (7) ist bedingt stabil für

$$\boxed{\alpha \;=\; c\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \;\le\; 1}\;. \tag{10}$$

$\Delta x$ und $\Delta t$ können also nicht unabhängig voneinander gewählt werden: Jede Verfeinerung der räumlichen Auflösung $\Delta x$ erfordert auch eine Verkleinerung des Zeitschrittes $\Delta t$. Die Bedeutung der CFL-Bedingung (10) liegt darin, daß sie eine Beziehung herstellt zwischen der Informations-Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_A$ des Algorithmus und der physikalischen Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ einer Lösung der Wellengleichung (1). Nach Abb. 2 wird Information durch das Differenzenverfahren um höchstens eine räumliche Gittermasche pro Zeitschritt transportiert, d.h. $c_A=\Delta x/\Delta t$. Die CFL-Bedingung, $c_A=\Delta x/\Delta t\ge c$ besagt also, daß die Informations-Ausbreitungsgeschwindigkeit des Algorithmus mindestens so groß sein muß wie die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$.

Anmerkung:
Am Stabilitätslimit $\alpha=1$ bzw. $\Delta x=c\,\Delta t$ liefert das explizite Verfahren (7) — abgesehen von Rundungsfehlern — die exakte Lösung von (1).

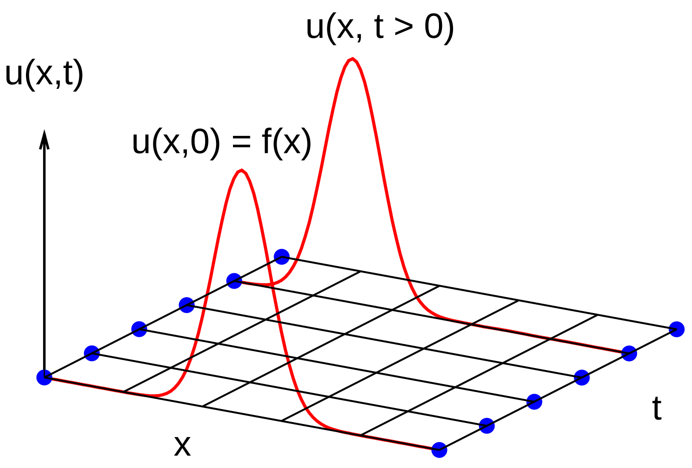


**Abbildung** 1: Anfangs- und Randbedingungen.

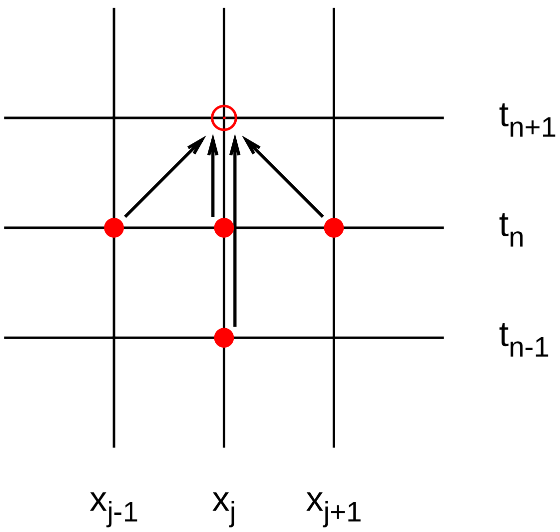


**Abbildung** 2: Informationsfluß beim expliziten Verfahren.