Beispiele zur Monte Carlo-Simulation

1. Es sei $z = x+y$ die Summe zweier statistisch unabhängiger, auf dem Intervall $[0, 1)$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Erzeuge eine Stichprobe $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ und berechne Stichprobenmittelwert, Varianz sowie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsdichte von z.

2. Symmetrische Irrfahrt (*Random Walk*) in einer Dimension: Ein Random Walker startet bei $x_0 = 0$ und führt n Schritte der Länge $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \pm 1$ aus. Bei jedem Schritt sei die Wahrscheinlichkeit, nach links oder rechts zu gehen, jeweils 1/2. Führe eine größere Anzahl von Random Walks durch und bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung, daß nach Ende der Irrfahrt der Random Walk genau bei $x_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ endet. Bestimme auch den im quadratischen Mittel zurückgelegten Weg $\langle x_n^2 \rangle$.

3. Benütze die Transformationsmethode, um eine Stichprobe aus der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

zu erzeugen. Überprüfe die Implementation durch Vergleich des aus der Stichprobe gewonnenen Histogramms mit der vorgegebenen Verteilung.

4. Es sei die (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = x(1-x)$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ gegeben. Um nach der *Rejection*-Methode eine Stichprobe aus dieser Verteilung zu erzeugen, sucht man eine obere Schranke A, für die gilt $f(x) \leq A$ (hier also z.B. $A = 1/4$). Man würfelt nun Punktepaare (x, y) mit $x = \xi$ und $y = A\eta$ (wo ξ und η unabhängige gleichverteile Zufallsvariablen aus $[0, 1)$ sind) und verwirft alle Punkte, für die $y > f(x)$ ist. Die x-Koordinaten der verbleibenden Punktepaare bilden eine Stichprobe aus $f(x)$. Warum?
Erzeuge eine hinreichend große Stichprobe und verifziere an Hand des Histogramms die Korrektheit der Methode.