Beispiele zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. Löse die Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\omega^2 x \\ \dot{x} &= v\end{aligned}$$

   (Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $v(0) = v_0$) für den Fall $\omega^2 = 1$ mit dem expliziten und impliziten Euler- sowie mit dem Cromer-Verfahren. Welches Verfahren ist stabil, welches instabil ("explodiert"), welches erhält langfristig die Gesamtenergie?

2. Genauigkeit und (möglicherweise) Stabilität der numerischen Lösung von Differentialgleichungen hängen wesentlich von der räumlichen bzw. zeitlichen Schrittweite ab. Wie groß darf oder wie klein muß man im vorigen Beispiel den Zeitschritt Δt machen, damit nach ein, zwei, … Perioden des Oszillators die numerischen Lösung noch annähernd mit der analytischen übereinstimmt?

3. Während der harmonische Oszillator eines der wenigen Systeme darstellt, für die man die Lösung der Bewegungsgleichungen geschlossen angeben kann, ist dies beim mathematischen Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

   schon nicht mehr der Fall (φ ist der Auslenkwinkel, g die Erdbeschleunigung und ℓ die Pendellänge). Löse die Bewegungsgleichungen des mathematischen Pendels numerisch für den Fall $g/\ell = 1$ und verschiedene Anfangsauslenkungen. Hängt die Periodendauer von der Auslenkung ab? Wie vergleichen sich die Trajektorien von harmonischem Oszillator und mathematischem Pendel im Phasenraum (xv-Ebene)?

4. Löse die Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator oder das mathematische Pendel mit dem Leapfrog-Verfahren (wobei der fehlende Startwert für die Geschwindigkeit mit Taylorentwicklung aus der Differentialgleichung erzeugt werden soll) sowie mit dem Runge-Kutta-Verfahren 2. und 4. Ordnung. Kann man beim Verfahren 4. Ordnung einen größeren Zeitschritt verwenden?