Beispiele zur numerischen Integration

1. Bestimme mit der zusammengesetzten Trapezregel einen Näherungswert von
$$I \;=\; \int\limits_{a\,=\,0}^{b\,=\,1.3} \frac{1}{1+x}\,dx \;=\; \log(1+x)\Big|_0^{1.3}$$
für verschiedene Werte einer vorgegebenen relativen Genauigkeit $\epsilon := |(I-T(h))/I| = 10^{-3},\ldots,10^{-5}$.

2. Konvergenzverhalten der Trapezsummen $T(h)$:
Untersuche für das Integral aus Beispiel 1 das Verhalten des relativen Fehlers $|(I - T(h))/I|$ in Abhängigkeit von der Schrittweite h durch sukzessive Halbierung von h (d.h. $h_n = (b-a)/2^n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$) und stelle das Ergebnis graphisch dar.

3. Implementiere die zusammengesetzte Simpsonregel mit Hilfe der Trapezregel.

4. Mit der 5-Punkte Gauß-Legendre-Quadraturformel werden Polynome bis zum Grad 9 exakt integriert (abgesehen von Rundungsfehlern). Für
$$\int_{-1}^{1} x^m\,dx\ , \qquad\qquad m = 0, 1, 2, \ldots, 9$$
sollten daher die Ergebnisse der Näherungswerte auf etwa 5 Dezimalstellen genau sein (bei einfachgenauer Rechnung, d.h. mit `real` bzw. `float`). Verwende die obigen Integrale, um die Werte für die Stützstellen x_i und Gewichte w_i auf ihre Korrektheit hin zu überprüfen.

5. Berechne Näherungswerte für das bestimmte Integral
$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \;=\; \frac{\pi}{2} - 1$$
mit der zusammengesetzten Trapezregel, der zusammengesetzten Simpsonregel und mit der 5-Punkte Gauß-Legendre-Quadraturformel. Wieviele Funktionsauswertungen müssen in jedem Fall durchgeführt werden, um jeweils auf eine Genauigkeit von 4 Dezimalstellen zu kommen?

6. In der Statistik tritt häufig die sogenannte *Fehlerfunktion* (engl.: *error function*) auf,
$$\mathrm{erf}(x) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt\ ,$$
ein Integral, das sich nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Berechne für $0 \le x \le 3$ Näherungswerte von $\mathrm{erf}(x)$ und stelle diese graphisch dar. Überprüfe das Ergebnis mit Hilfe von *Gnuplot*:
```
gnuplot> set xrange [0:3]; plot erf(x)
```