

## Beispiele zur Fourier-Transformation

1. Es seien die folgenden Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gegeben

- eine Funktion mit Sprungstellen

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- eine Funktion mit Knickstellen

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 + 2x & -1 \leq x < 0 \\ 1 - 2x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

- eine glatte Funktion

$$f_3(x) = \begin{cases} 4(x + x^2) & -1 \leq x < 0 \\ 4(x - x^2) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Die Funktionen sind so gewählt, daß (bis auf einen Faktor)  $f_1$  die Ableitung von  $f_2$  ist und  $f_2$  die von  $f_3$ . Die Fourier-Koeffizienten von  $f_2$  und  $f_3$  lassen sich daher leicht aus denen von  $f_1$  (vgl. Heaviside-Funktion) berechnen. Wie viele Terme muß man in der Fourier-Entwicklung von  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  berücksichtigen, um jeweils eine graphisch akzeptable Darstellung der Funktion zu erhalten?

2. Wenn die Fourier-Koeffizienten einer Funktion sich nicht analytisch berechnen lassen, kann man die Integrale in

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} f(x)$$

(bzw.  $a_n$  und  $b_n$  bei reellwertigen Funktionen) immer noch numerisch auswerten. Führe auf diese Weise die Fourier-Darstellung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^2 e^{-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf dem Intervall  $[-2, 2]$  durch.

3. Ist  $f(x)$  ein Funktion auf dem Intervall  $[-L/2, L/2]$  mit den Fourier-Koeffizienten  $c_n$ , so besagt das Translationstheorem, daß die Fourier-Koeffizienten von  $f(x + \alpha)$  durch  $e^{ik_n \alpha} c_n$  gegeben sind. Warum? Wie lautet das Theorem für die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  einer reellwertigen Funktion? Wende das Theorem auf eine der Funktionen aus den obigen Beispielen an und verifiziere das Ergebnis graphisch durch Zeichnen der Fourier-Darstellung von  $f(x + \alpha)$ .