Erde, Mond und die Gravitationskonstante

Franz Embacher

Fakultät für Physik
der Universität Wien

Vortrag im Rahmen der
Lehrerfortbildungstagung ASTRONOMIE

Friedrich-Schiller-Universität Jena, 15. – 17. Juli 2013

Fragen…

- Wie groß sind Erde und Mond?
- Wie weit ist der Mond von der Erde entfernt?
- Welche Masse hat die Erde?
- Welchen Wert hat die im Newtonschen Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

auftretende Gravitationskonstante?

Fragen…

- Wie groß sind Erde und Mond?
- Wie weit ist der Mond von der Erde entfernt?
- Welche Masse hat die Erde?
- Welchen Wert hat die im Newtonschen Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

auftretende Gravitationskonstante?

… und woher kennen wir die Antworten
auf diese Fragen?

Antwortmöglichkeiten 1

- Gravitationskonstante

  ... hat Henry Cavendish im Labor gemessen

- Radius der Erde

  ... hat Eratosthenes von Kyrene bestimmt

- Masse der Erde

  ... aus der Formel für die Erdbeschleunigung

$$g = G \frac{M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^{2}}$$

- Größe und Entfernung des Mondes

  ... durch Beobachtung einer Mondfinsternis
  und durch zeitgleiche Beobachtung des Mondes von unterschiedlichen Positionen auf der Erde

Antwortmöglichkeiten 1

- Gravitationskonstante

  ... hat Henry Cavendish im Labor gemessen

  nicht leicht durchführbar

- Radius der Erde

  ... hat Eratosthenes von Kyrene bestimmt

  nicht leicht durchführbar

- Masse der Erde

  ... aus der Formel für die Erdbeschleunigung

$$g = G\,\frac{M_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^{2}}$$

- Größe und Entfernung des Mondes

  nicht leicht durchführbar

  ... durch Beobachtung einer Mondfinsternis
  und durch zeitgleiche Beobachtung des Mondes von unterschiedlichen Positionen auf der Erde

In der Regel wird das Ergebnis den SchülerInnen lediglich mitgeteilt.

…rtmöglichkeiten 1

- Gravitationskonstante

  … hat Henry Cavendish im Labor gemessen

nicht leicht durchführbar

- Radius der Erde

  … hat Eratosthenes von Kyrene bestimmt

nicht leicht durchführbar

In der Regel wird das Ergebnis den SchülerInnen lediglich mitgeteilt.

…l für die Erdbeschleunigung

$$g = G\,\frac{M_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^{2}}$$

In der Regel wird das Ergebnis den SchülerInnen lediglich mitgeteilt.

nicht leicht durchführbar

- …g des Mondes

  … durch Beobachtung einer Mondfinsternis
  und durch zeitgleiche Beobachtung des Mondes von unterschiedlichen Positionen auf der Erde

Antwortmöglichkeiten 2a

Theoretische Voraussetzung:

- Newtonsches Gravitationsgesetz
- ein bisschen Geometrie und Algebra

Vier Beobachtungsdaten:

- Erdbeschleunigung
  ($\approx 10\ \mathrm{m/s^2}$)
- Umlaufzeit des Mondes
  (≈ 4 Wochen)
- Scheinbare Größe des Mondes
  ($\approx 1/2$ Winkelgrad)
- Größe des Erdschattens auf dem Mond
  (≈ 3 mal der Größe des Mondes)

→ bestimmen: R_{Erde}, R_{Mond}, r und GM_{Erde} !

Antwortmöglichkeiten 2a

Theoretische Voraussetzung:

- Newtonsches Gravitationsgesetz
- ein bisschen Geometrie und Algebra

Vier Beobachtungsdaten:

- Erdbeschleunigung
  ($\approx 10\ \mathrm{m/s}^2$)
- Umlaufzeit des Mondes
  (≈ 4 Wochen)
- Scheinbare Größe des Mondes
  ($\approx 1/2$ Winkelgrad)
- Größe des Erdschattens auf dem Mond
  (≈ 3 mal der Größe des Mondes)

Alternative bzw. ergänzende sachlogische Vorgangsweise für die Sek II

→ bestimmen: R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde} !

Theoretische Voraussetzungen

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

mit als unbekannt angenommener Gravitationskonstante G.

Theoretische Voraussetzungen

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2} \quad \xrightarrow{\text{Grundgesetz der Mechanik}} \quad m\,a = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

mit als unbekannt angenommener Gravitationskonstante G.

Theoretische Voraussetzungen

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2} \quad \xrightarrow{\text{Grundgesetz der Mechanik}} \quad m\,a = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

mit als unbekannt angenommener Gravitationskonstante G.

$$a = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Erdbeschleunigung

3. Keplersches Gesetz für (kreisförmigen) Mondumlauf

$$g = \frac{G M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}{}^2}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_{\text{Erde}}}{4\pi^2}$$

Voraussetzungen | Näherungen

Weitere Voraussetzungen:

- Strahlensatz
- Satz von Pythagoras
- elementare algebraische Umformungen

Näherungen:

- Erde und Mond sind Kugeln.
- Erdposition ist fixiert.
- Mond umläuft die Erde auf einer Kreisbahn.
- Sonne und Mond werden unter dem gleichen Winkel gesehen.
- Weitere Näherungen: Erdumlauf um die Sonne wird vernachlässigt, Erdatmosphäre wird vernachlässigt.

Worum es (nicht) geht

Worum es (hier) in erster Linie geht:

- Verwendung von Größen, die der Anschauung leicht zugänglich sind,
- deren Werte größenordnungsmäßig bekannt sind oder leicht (näherungsweise) in Erfahrung gebracht werden können,
- die (zumindest zum Teil) von SchülerInnen selbst gemessen werden können
- und die mit den gesuchten Größen in einen physikalischen (SchülerInnen bekannten) Zusammenhang gebracht werden.

Worum es (hier) in erster Linie *nicht* geht:

- Präzisionsaussagen
- Problematisierung von Messfehlern und unberücksichtigten Effekten

Erdbeschleunigung

Der Wert der Erdbeschleunigung g

- kann in einem Fallexperiment bestimmt werden
- und ist im Physikunterricht gut etabliert.
- Der „Idealwert“ ist:

$$g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$$

(Der wahre Wert hängt vom Ort auf der Erdoberfläche ab und variiert um einige Promille.)

Umlaufzeit des Mondes

Relevant ist der siderische Monat, d.h. die Zeitspanne, nach der sich die beobachtete Stellung des Mondes relativ zu den Fixsternen wiederholt.

- Seine Messung erfordert die Beobachtung des Mondes über längere Zeiten,
- aber im Prinzip ist klar, wie sie durchgeführt wird, und die Größenordnung des Ergebnisses ist wohlbekannt ($\approx$ 4 Wochen).
- Der „Idealwert“ ist:

$$T = 27.3 \text{ Tage}$$

Eine Verlockung…

Der synodische Monat, nach dem sich die Mondphasen wiederholen, ist

- mit ganztägiger Genauigkeit als Zeitspanne zwischen zwei Vollmonden aus einem Kalender zu ermitteln, aber
- um 2 Tage länger als der siderische Monat (im Mittel 29.5 Tage),
- physikalisch hier eigentlich nicht zulässig,
- und seine Verwendung bewirkt einen Fehler von 15 bis 30% in den Endergebnissen.

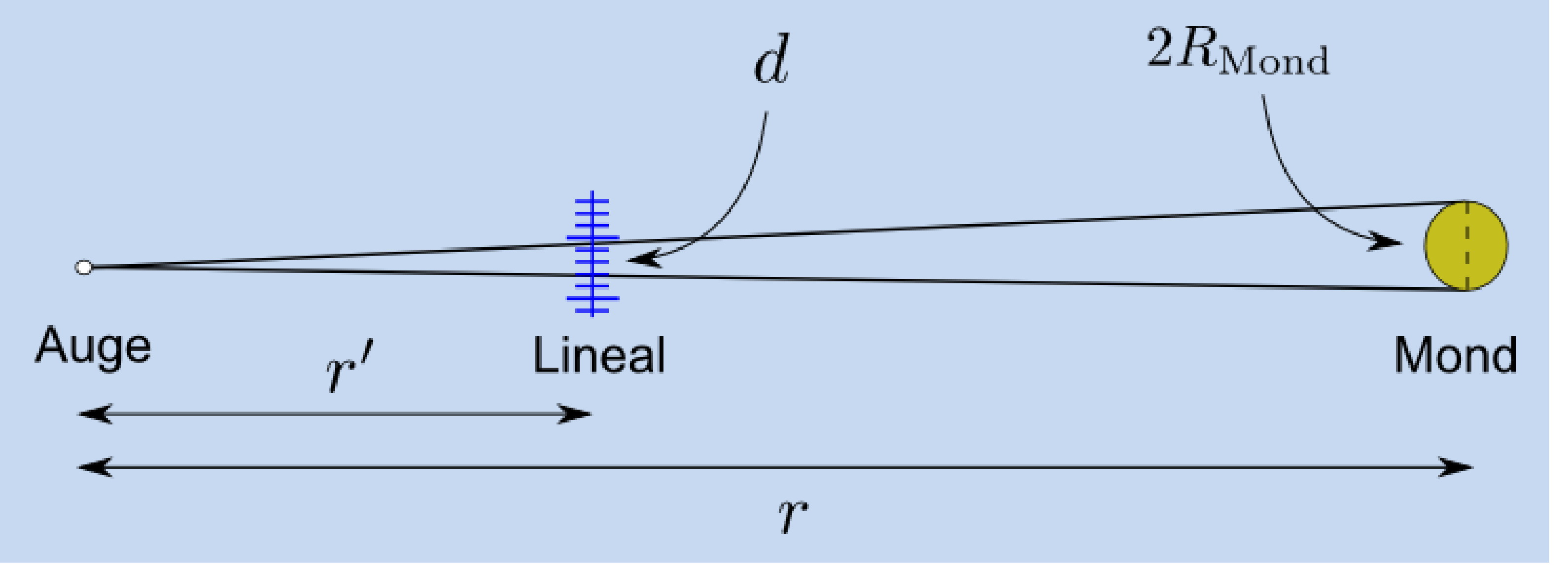
Daher ist von dieser vermeintlichen Vereinfachung eher abzuraten.

Monddurchmesser : Mondentfernung

Das Verhältnis

$$\alpha = \frac{2R_{\text{Mond}}}{r}$$

kann mit einem Lineal gemessen werden:



$$\alpha = \frac{2R_{\text{Mond}}}{r} = \frac{d}{r'}$$

Monddurchmesser : Mondentfernung

$$\alpha = \frac{2R_{\text{Mond}}}{r}$$

Der „Idealwert“ ist:

$$\alpha = 0.009$$

(das entspricht $\approx 1/2$ Winkelgrad).

Anmerkung: Aufgrund des variierenden Erde-Mond-Abstands schwankt α zwischen 0.00854 und 0.00975.

Größe der Erde : Größe des Mondes

Das Verhältnis

$$\kappa = \frac{R_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Mond}}}$$

kann aus der Aufnahme einer Mondfinsternis (genauer: Kernschattenfinsternis) ermittelt werden:

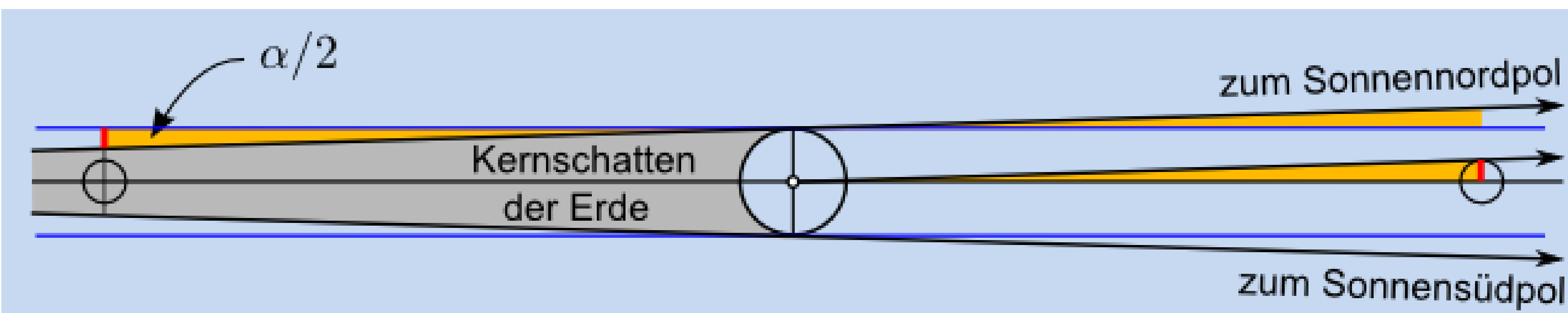
http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mondfinsternis_2008-08-16.jpg

Größe der Erde : Größe des Mondes

$$\kappa = \frac{R_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Mond}}}$$

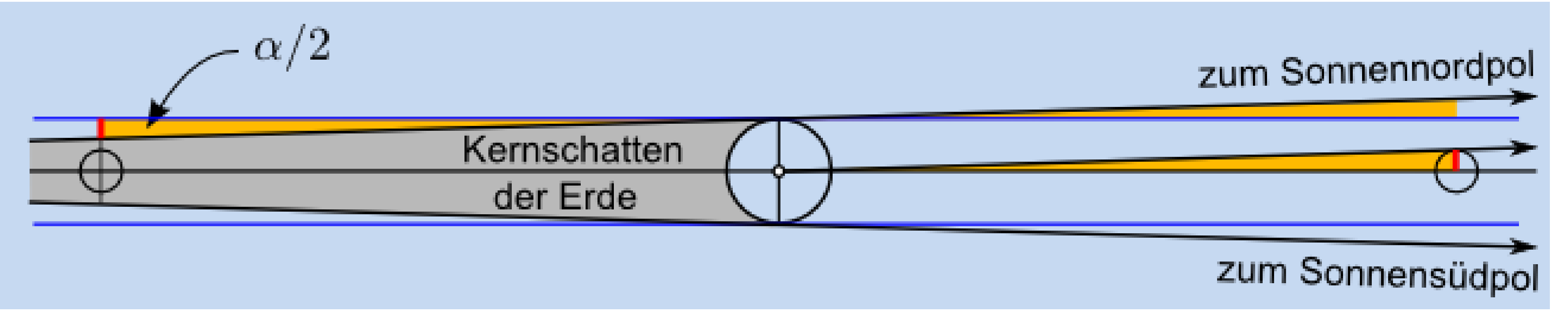
Dabei ist allerdings zu bedenken, dass

Kernschattenradius $\neq$ Erdradius !



(Hipparchos, zweites vorchristliches Jahrhundert)

Größe der Erde : Größe des Mondes



Da wir Sonne und Mond unter dem gleichen Winkel sehen, gilt

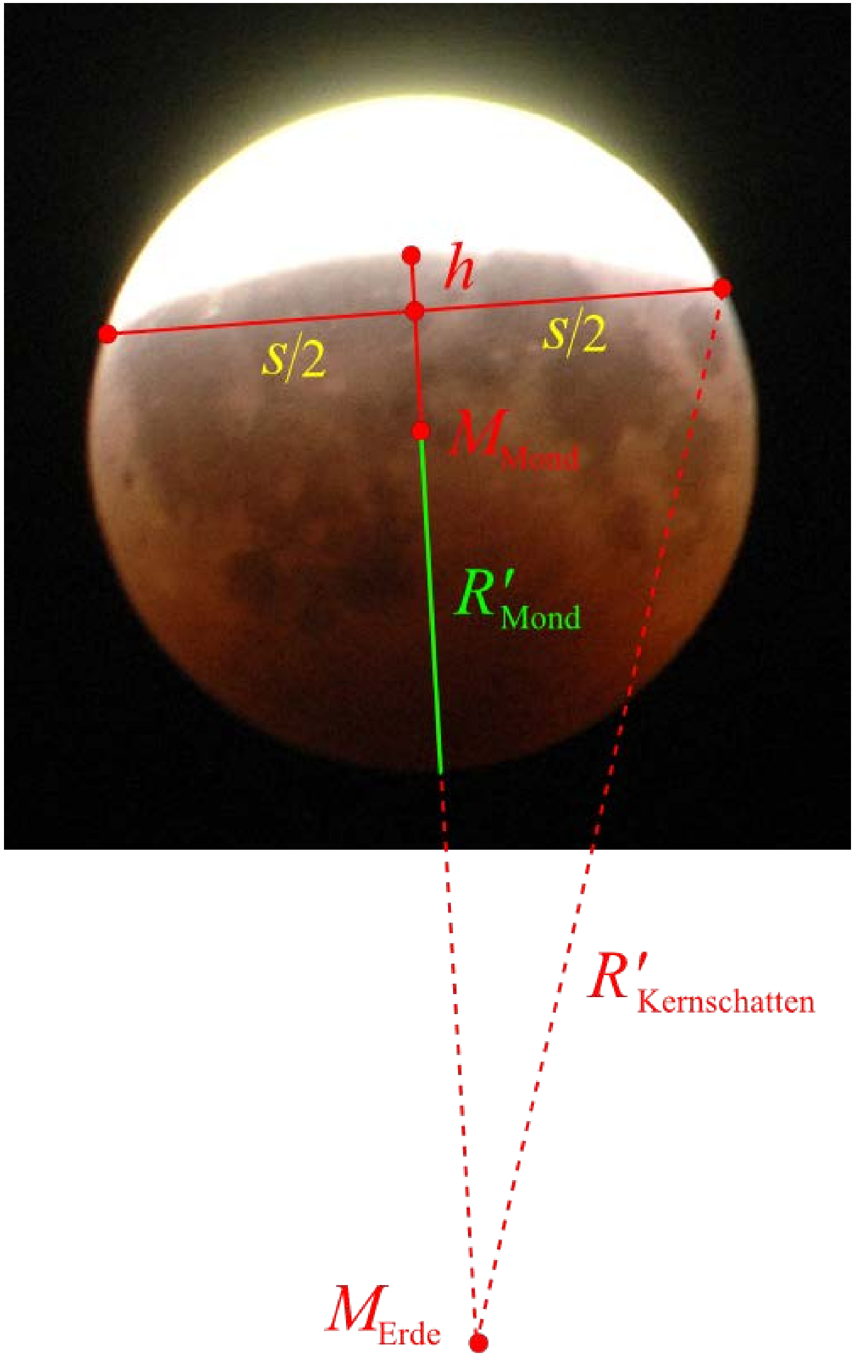
$$R_{\text{Kernschatten}} = R_{\text{Erde}} - R_{\text{Mond}}$$

daher

$$\frac{R_{\text{Kernschatten}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} - 1$$

und folglich

$$\kappa = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{R_{\text{Kernschatten}}}{R_{\text{Mond}}} + 1$$



Erde : Mond

Geometrische Auswertung (etwa anhand eines Papierausdrucks):

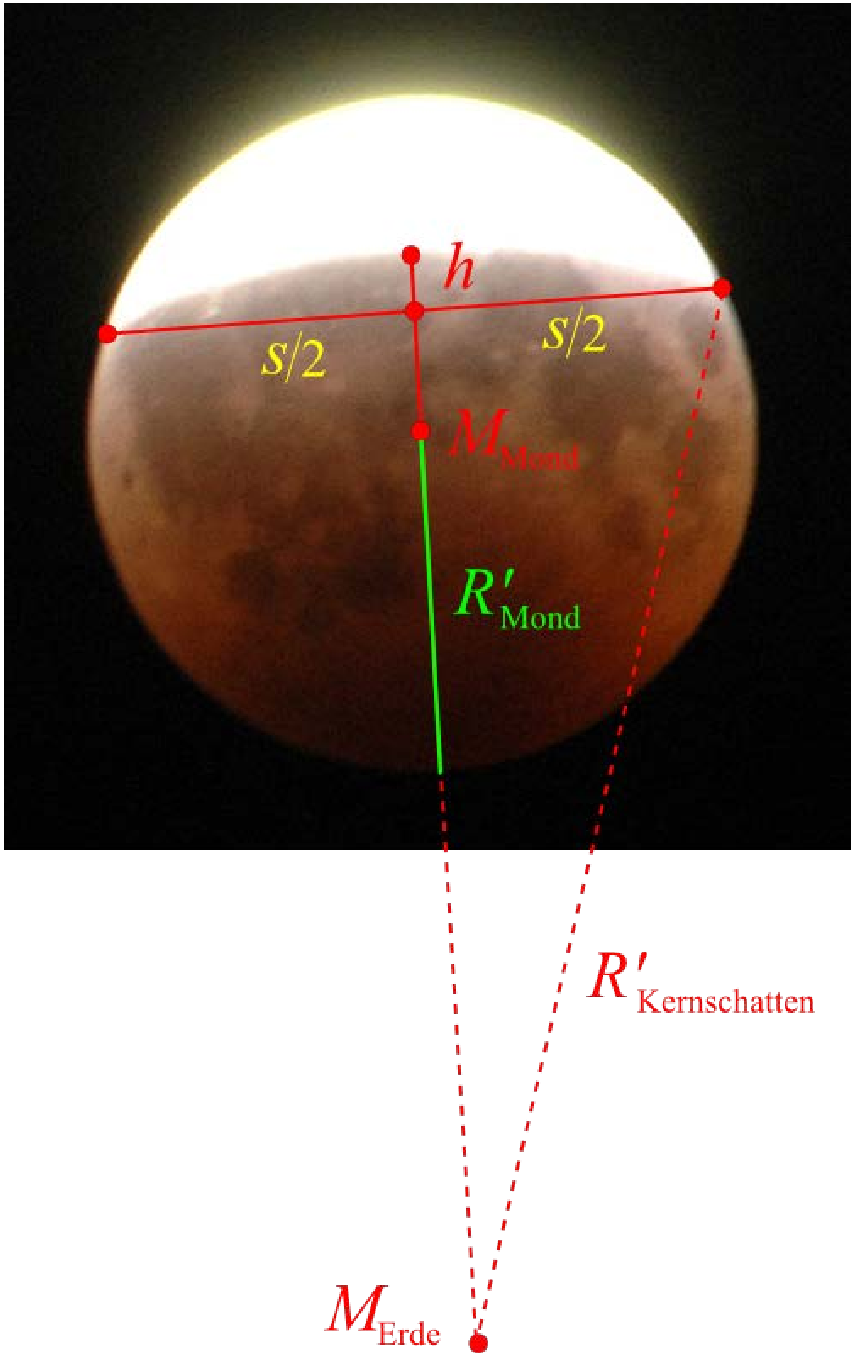
Satz von Pythagoras:

$$\left(R'_{\text{Kernschatten}} - h\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = R'_{\text{Kernschatten}}{}^2$$

und daraus:

$$\frac{R_{\text{Kernschatten}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{R'_{\text{Kernschatten}}}{R'_{\text{Mond}}} = \frac{4h^2 + s^2}{8hR'_{\text{Mond}}}$$

Erde : Mond



Geometrische Auswertung (etwa anhand eines Papierausdrucks):

Satz von Pythagoras:

$$\left(R'_{Kernschatten} - h\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = R'^{\,2}_{Kernschatten}$$

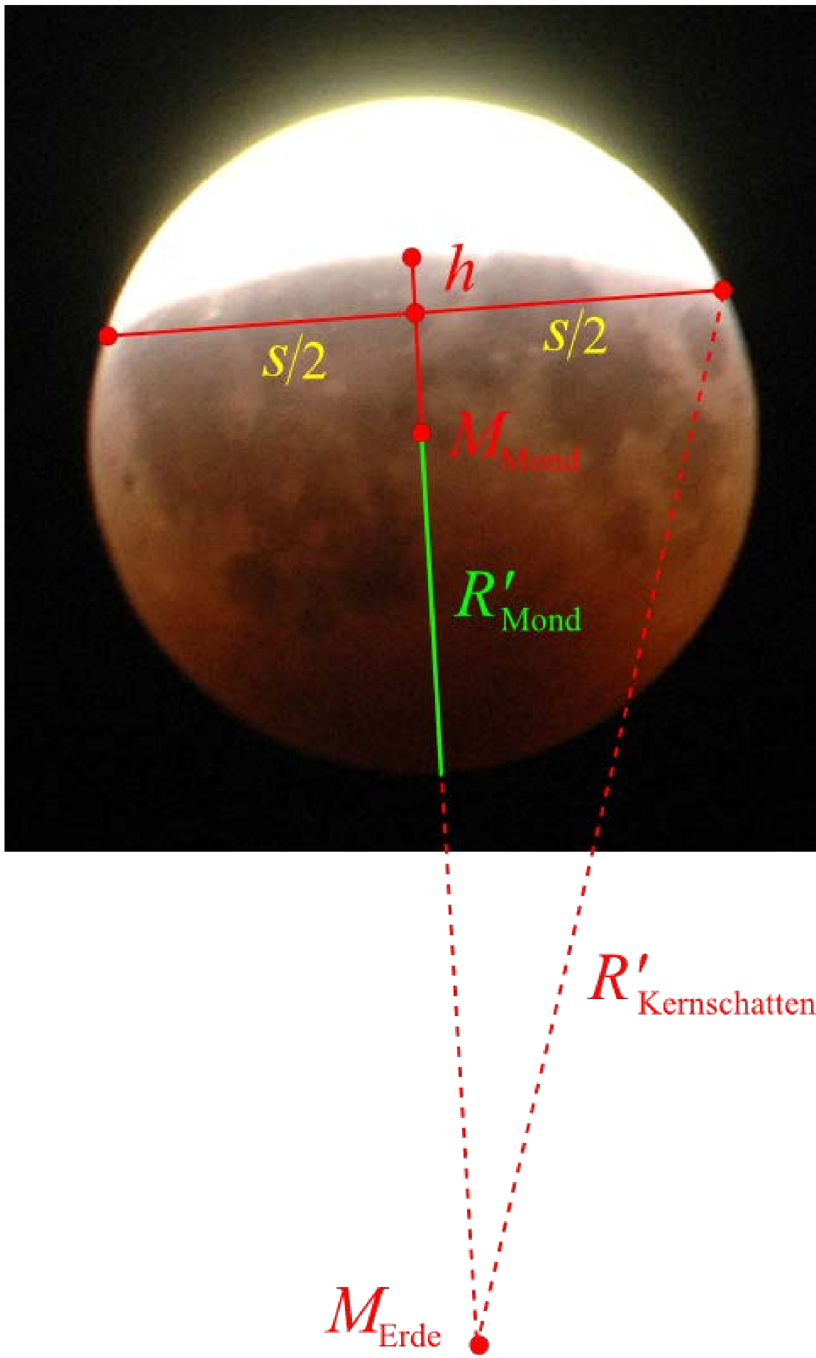
und daraus:

$$\frac{R_{Kernschatten}}{R_{Mond}} = \frac{R'_{Kernschatten}}{R'_{Mond}} = \frac{4h^2 + s^2}{8hR'_{Mond}}$$

berechnen!

abmessen!

Erde : Mond



Typischer Papierausdruck:

$$h = 6.5 \text{ mm}$$

$$s = 74 \text{ mm}$$

$$R'_{\text{Mond}} = 40 \text{ mm}$$

daher

$$\frac{R'_{\text{Kernschatten}}}{R'_{\text{Mond}}} = 2.7$$

und

$$\boxed{\kappa = \frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = 3.7}$$

(„Idealwert“)

Größe der Erde : Größe des Mondes

Anmerkung zur Genauigkeit der Bestimmung von κ:

- Fehlerquelle Erdatmosphäre:
  - Schattengrenze unscharf und u.U. schwer zu lokalisieren
  - Schattenvergrößerung um 2%
- Fehlerquelle Konstrastverstärkung (digitales Rendering)

http://www.dangl.at/2008/mf080816/mf080816e.htm

http://www.martin-wagner.org/totale_mondfinsternis_maerz_2007.htm

Zusammenfassung: Idealwerte

$$g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$$

$$T = 27.3\ \mathrm{Tage}$$

$$\alpha = \frac{2R_{\mathrm{Mond}}}{r} = 0.009$$

$$\kappa = \frac{R_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Mond}}} = 3.7$$

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

$$\frac{GM_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^{\;2}} = g$$

$$\frac{4\pi^2 r^3}{GM_{\mathrm{Erde}}} = T^2$$

$$\frac{2R_{\mathrm{Mond}}}{r} = \alpha$$

$$\frac{R_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Mond}}} = \kappa$$

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

$$\frac{GM_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^{2}} = g$$

bekannt!

$$\frac{4\pi^2 r^3}{GM_{\text{Erde}}} = T^2$$

bekannt!

$$\frac{2R_{\text{Mond}}}{r} = \alpha$$

bekannt!

$$\frac{R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Mond}}} = \kappa$$

bekannt!

Vier Gleichungen für
vier Unbekannte:
R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde} !

→ nach den Unbekannten auflösen!

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

Nach den Unbekannten aufgelöst:

$$R_{\mathrm{Erde}} = \frac{g\,T^2\alpha^3\kappa^3}{32\,\pi^2}$$

$$R_{\mathrm{Mond}} = \frac{g\,T^2\alpha^3\kappa^2}{32\,\pi^2}$$

$$r = \frac{g\,T^2\alpha^2\kappa^2}{16\,\pi^2}$$

$$GM_{\mathrm{Erde}} = \frac{g^3T^4\alpha^6\kappa^6}{32^2\,\pi^4}$$

Jede der vier Größen g, T, α und κ ist nötig!

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

Die numerischen Ergebnisse mit den „Idealwerten" sind:

$$R_{\text{Erde}} = 6381 \text{ km}$$

$$R_{\text{Mond}} = 1725 \text{ km}$$

$$r = 383300 \text{ km}$$

$$GM_{\text{Erde}} = 3.995 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

Die numerischen Ergebnisse mit den „Idealwerten“ sind:

$$R_{\mathrm{Erde}} = 6381 \text{ km}$$

mittlerer Erdradius: 6371.0 km

$$R_{\mathrm{Mond}} = 1725 \text{ km}$$

mittlerer Mondradius: 1737 km

$$r = 383300 \text{ km}$$

mittlere Erde-Mond-Distanz: 384400 km

$$GM_{\mathrm{Erde}} = 3.995 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

geozentrische Gravitationskonstante: $3.986004418 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2 (World Geodetic System 1984)

Abweichungen von den wahren (mittleren) Werten < 1% !

Bestimmung von R_{Erde} , R_{Mond} , r und GM_{Erde}

Einfluss von Messfehlern und unberücksichtigten Effekten:

Relative Fehler …		**… verursachen relative Fehler …**			
$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	$\frac{\Delta\kappa}{\kappa}$	$\frac{\Delta R_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}}$	$\frac{\Delta R_{\mathrm{Mond}}}{R_{\mathrm{Mond}}}$	$\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{\Delta(GM_{\mathrm{Erde}})}{GM_{\mathrm{Erde}}}$
0.01	0	0.03	0.03	0.02	0.06
0	0.01	0.03	0.02	0.02	0.06
0.01	0.01	0.04	0.04	0.03	0.08
0.05	0	0.15	0.15	0.10	0.30
0	0.05	0.15	0.10	0.10	0.30
0.05	0.05	0.21	0.18	0.14	0.42

Antwortmöglichkeiten 2b

Bisher GM_{Erde} bestimmt, aber nicht G und M_{Erde} !

Tieferer Grund:

- Struktur des Newtonschen Gravitationsgesetzes
- Gleichheit von träger und schwerer Masse!
- Eines der großen Probleme der Astronomie des 17. und 18. Jahrhunderts!

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \qquad \text{wobei} \qquad \vec{F}_j = G\frac{M_j\, m}{r^2}\vec{e}_j$$

m kürzt sich aus der Bewegungsgleichung heraus (links als träge Masse und rechts als schwere Masse)!

→ Massen können *nicht* durch die Beobachtung rein gravitativ bestimmter Bewegungen bestimmt werden!

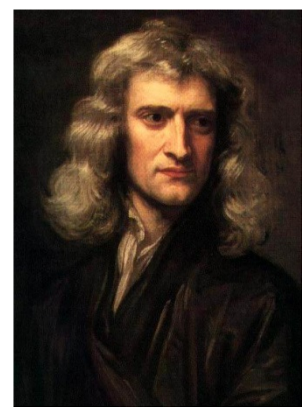
Erdmasse und Gravitationskonstante

Massen können *nicht* durch die Beobachtung rein gravitativ bestimmter Bewegungen bestimmt werden!

→ Zur Bestimmung von G und M_{Erde} müssen nicht-gravitative Kräfte einbezogen werden:

- Mit kleinen Massen: Experiment von Henry Cavendish (1798) und nachfolgende Verbesserungen (Loránd Eötvös,…): Gravitations-Drehwaage

- Mit großen Massen:
  Isaac Newton: Näherungswert der Gravitationskonstante durch Abschätzung der Dichte der Erde!



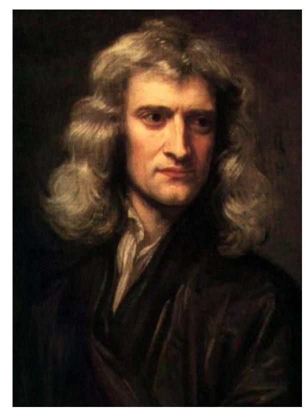
Erdmasse und Gravitationskonstante

Massen können *nicht* durch die Beobachtung rein gravitativ bestimmter Bewegungen bestimmt werden!

→ Zur Bestimmung von G und M_{Erde} müssen nicht-gravitative Kräfte einbezogen werden:

- Mit kleinen Massen: Experiment von Henry Cavendish (1798) und nachfolgende Verbesserungen (Loránd Eötvös,…): Gravitations-Drehwaage

- Mit großen Massen:
  Isaac Newton: Näherungswert der Gravitationskonstante durch Abschätzung der Dichte der Erde!



$$M_{\text{Erde}} = V_{\text{Erde}} \cdot \rho$$

Erdmasse und Gravitationskonstante

Wie kann die Dichte ρ der Erde abgeschätzt oder zumindest plausibel eingegrenzt werden?

- Dichte oberflächennaher Gesteine: $\approx 2700\ \mathrm{kg/m^3}$
- Im Erdinneren ist die Dichte sicher größer als an der Oberfläche (physikalische Argumente: Absinken, Druck)
- Allgemeine Eigenschaft von festen und flüssigen Stoffen: Dichten variieren in einem überschaubaren Bereich (von etwa $1000\ \mathrm{kg/m^3}$ bis $20000\ \mathrm{kg/m^3}$)!
- Physikalischer Grund: Atome sind sehr robust (und ihre Größe variiert nicht sehr stark) – dank der elektromagnetischen Wechselwirkung und ihrer Quantennatur!

Erdmasse und Gravitationskonstante

Zwei mögliche Strategien:

- „Gut raten“: Veranschlagen einen Faktor 2 im Vergleich zu Oberflächengestein:

$$\rho \approx 5400\ \mathrm{kg/m^3}$$

Damit ergibt sich

$$M_{\mathrm{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

(wahrer Wert: $5.974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$) und

$$G = \frac{G M_{\mathrm{Erde}}}{M_{\mathrm{Erde}}} \approx 7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}}$$

(wahrer Wert: $6.673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}}$).

Erdmasse und Gravitationskonstante

Zwei mögliche Strategien:

- „Gut raten“: Veranschlagen einen Faktor 2 im Vergleich zu Oberflächengestein:

$$\rho \approx 5400\ \mathrm{kg/m^3}$$

Damit ergibt sich

$$M_{\mathrm{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

(wahrer Wert: $5.974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$) und

$$G = \frac{GM_{\mathrm{Erde}}}{M_{\mathrm{Erde}}} \approx 7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}}$$

(wahrer Wert: $6.673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}}$).

Newton hat „geraten“: Dichte der Erde = 5 mal der Dichte von Wasser.

Erdmasse und Gravitationskonstante

Seriöse Eingrenzung:

- Selbst wenn die Erde im Inneren aus schwersten Metallen besteht, kann erwartet werden:

$$2700\ \mathrm{kg/m^3} < \rho < 30000\ \mathrm{kg/m^3}$$

Damit ergibt sich

$$3\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \ < \ M_{\mathrm{Erde}} \ < \ 3\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}$$

und

$$10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}} \ < \ G \ < \ 10^{-10}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}}$$

Physikalische Nachbemerkungen

Fragen an die SchülerInnen:

- Warum hat die Masse des Mondes keine Rolle gespielt (und konnte daher auch nicht ermittelt werden)?
- Kann dieses Verfahren auch dazu verwendet werden, um die Größe der Sonne und ihre Entfernung (die „Astronomische Einheit") zu bestimmen?

Physikalische Nachbemerkungen

Fragen an die SchülerInnen:

- Warum hat die Masse des Mondes keine Rolle gespielt (und konnte daher auch nicht ermittelt werden)?
- Kann dieses Verfahren auch dazu verwendet werden, um die Größe der Sonne und ihre Entfernung (die „Astronomische Einheit") zu bestimmen?

Nein!

Antworten:

- In einem System „Zentralkörper + Satellit" kann (bei bekanntem G) aus der Bewegung *nur* die Masse des Zentralkörpers bestimmt werden!
  (Grund: träge = schwere Masse, Methode: Kepler 3)
- Unsere genauesten Daten der Planetenmassen: von der Bewegung künstlicher Satelliten!

Physikalische Nachbemerkungen

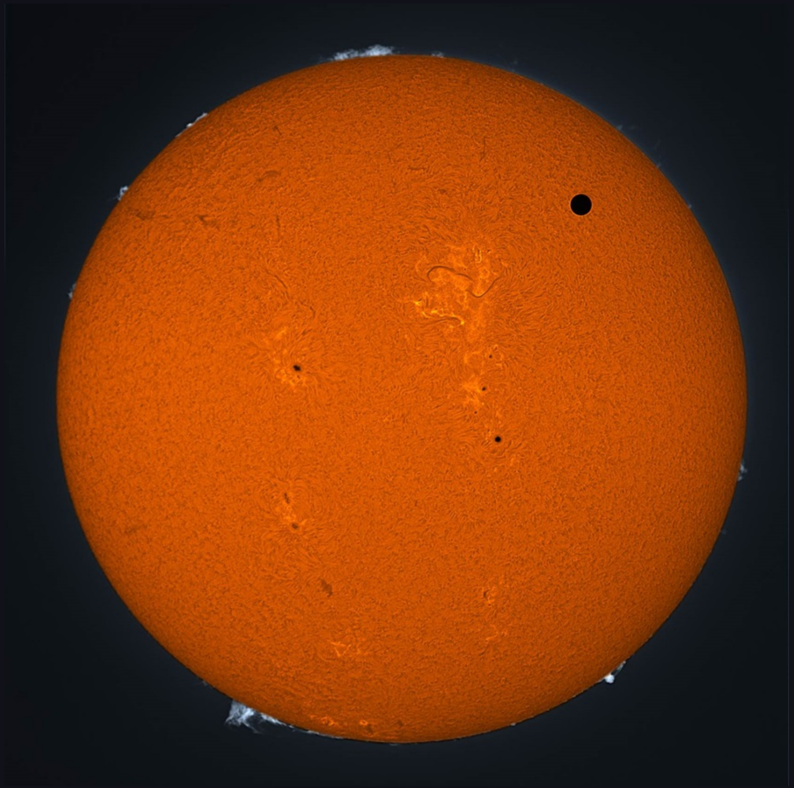
Antworten:

- Ohne genaue Kenntnis der Massen (im 17./18. Jahrhundert) konnte die Newtonsche Theorie nur die *Verhältnisse* von Distanzen im Sonnensystem angeben und vorhersagen, nicht aber die absoluten Distanzen.
- Die Astronomische Einheit wurde im 18. und 19. Jahrhundert parallaktisch bestimmt (Venustransit).

Physikalische Nachbemerkungen

Antworten:

- Ohne genaue Kenntnis der Massen (im 17./18. Jahrhundert) konnte die Newtonsche Theorie nur die *Verhältnisse* von Distanzen im Sonnensystem angeben und vorhersagen, nicht aber die absoluten Distanzen.
- Die Astronomische Einheit wurde im 18. und 19. Jahrhundert parallaktisch bestimmt (Venustransit).



http://apod.nasa.gov/apod/image/1206/VenusTransit2012_Hetlage.jpg

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation
finden Sie am Web unter

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EMG/