Sonderdruck

aus

Didaktik der Mathematik

Bayerischer Schulbuch-Verlag

Franz Embacher

Konstruktion des Kreismittelpunktes mit dem Zirkel

Das Problem der Konstruktion des Kreismittelpunktes allein mit Hilfe des Zirkels wird diskutiert. Einige didaktische Aspekte werden angeschnitten.

Vor längerer Zeit hat ein Freund ein Problem an mich herangetragen, dessen Lösung einige interessante didaktische Aspekte enthält. Dabei ist eine Kreislinie in der Zeichenebene ohne den dazugehörigen Mittelpunkt gegeben. Das Problem besteht darin, den Mittelpunkt des Kreises allein mit dem Zirkel, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Lineals zu konstruieren.

Die übliche Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist trivial und wird etwa mit Hilfe des Satzes von Thales durchgeführt: Zu einer beliebig gewählten Sehne [AB] werden jene beiden Sehnen konstruiert, die auf AB orthogonal stehen (Fig. 1). Der gesuchte Kreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen [AC] und [BD] des entstehenden Rechtecks. Alternativ dazu können die Streckensymmetralen zweier beliebiger Sehnen miteinander geschnitten werden.

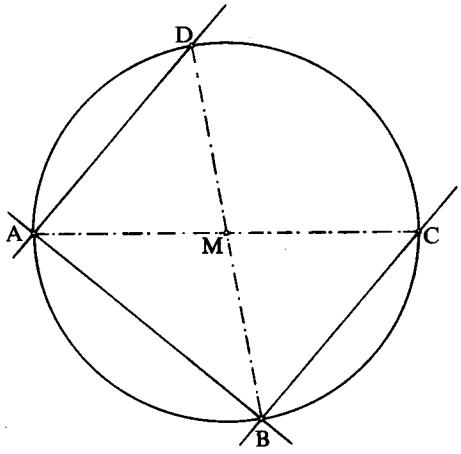

Fig. 1

Soll nun eine Konstruktion gefunden werden, die nur mit dem Zirkel auskommt, wird die Sache schlagartig komplizierter. Es liegt auf der Hand, daß „Näherungslösungen", etwa durch Abschlagen eines geschätzten Radius von der Kreislinie, nicht zulässig sind. Ich habe des öfteren Lehrer an Allgemeinbildenden Höheren Schulen und Kollegen an der Universität Wien zu diesem Problem befragt und zu meiner Überraschung gesehen, daß fast alle – mit Ausnahme der professionellen „Geometer" – denselben Fehler machten. Die typische Szene besteht darin, daß ein Blatt Papier und ein Zirkel zur Hand genommen und solange irgendwelche Kreise gezogen werden, bis das für ein derartiges Problem bereitstehende Quantum an Geduld aufgebraucht ist. Den wenigsten der von mir befrag-

ten Personen kam der Gedanke, daß vielleicht eine kleine Nebenrechnung helfen könnte. Interessanterweise konnten jedoch kleinste Hinweise als Anleitung zur schrittweisen Lösung dienen.

Konstruktionen allein mit dem Zirkel werden in der mathematischen Literatur „Mascheronische Konstruktionen" genannt (nach dem italienischen Mathematiker Lorenzo Mascheroni, 1750–1800). Eine Darstellung des genannten Problems in einem tiefergreifenden theoretischen Zusammenhang findet sich etwa in Courant und Robbins [2]. Im vorliegenden Beitrag soll es vor allem darum gehen, einen Lösungsweg zu skizzieren, der minimale mathematische Vorkenntnisse erfordert und sich im Prinzip für den Unterricht in Allgemeinbildenden Höheren Schulen eignet.

Wenden wir uns also dem Problem zu. Zunächst ist klar, daß man – in Ermangelung jedweder anderen Möglichkeit – eine *beliebige* Strecke in den Zirkel nehmen muß. Wir wollen sie mit x bezeichnen. Das entspricht etwa der Wahl einer *beliebigen* Sehne in der Konstruktion von Figur 1. Man überzeugt sich leicht, daß bloßes Probieren keinen Anhaltspunkt liefert. Es erscheint daher sinnvoll, sich einfache, mit Hilfe der gewählten Länge x konstruierte „Figuren" zu überlegen und auftretende Längenverhältnisse *rechnerisch* zu studieren. Entscheiden wir uns für die in Figur 2 gezeichnete „Figur": Es werden zwei Kreise mit dem Radius x und dem Mittelpunkt auf der gegebenen Kreislinie k so gezogen, daß eine „Linse" entsteht.

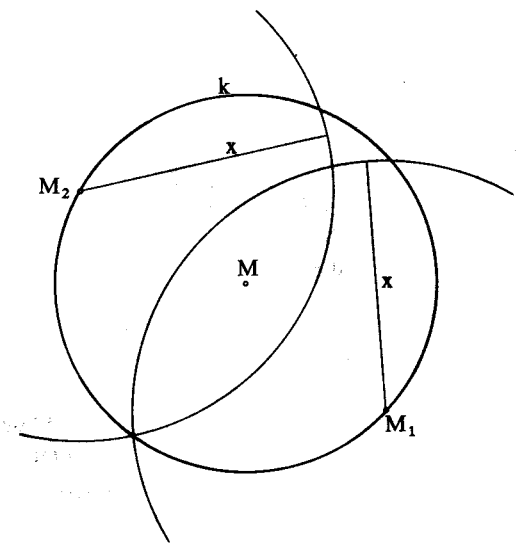

Fig. 2

Der entscheidende Schritt besteht nun darin, den „Durchmesser" der Linse, d.h. den Abstand d zwischen den beiden entstandenen Kreisschnittpunkten, als Funktion von x und dem Radius r des gegebenen Kreises zu bestimmen. Das Ziel ist, über die funktionale Abhängigkeit d(x, r) – etwa durch Auflösen nach r – Aufschluß über eine mögliche Konstruktion von r zu finden.

Das Resultat kann auf verschiedene Weise gewonnen werden und ist *verblüffend einfach.* Es ergibt sich

$$d = \frac{x^2}{r}. \tag{1}$$

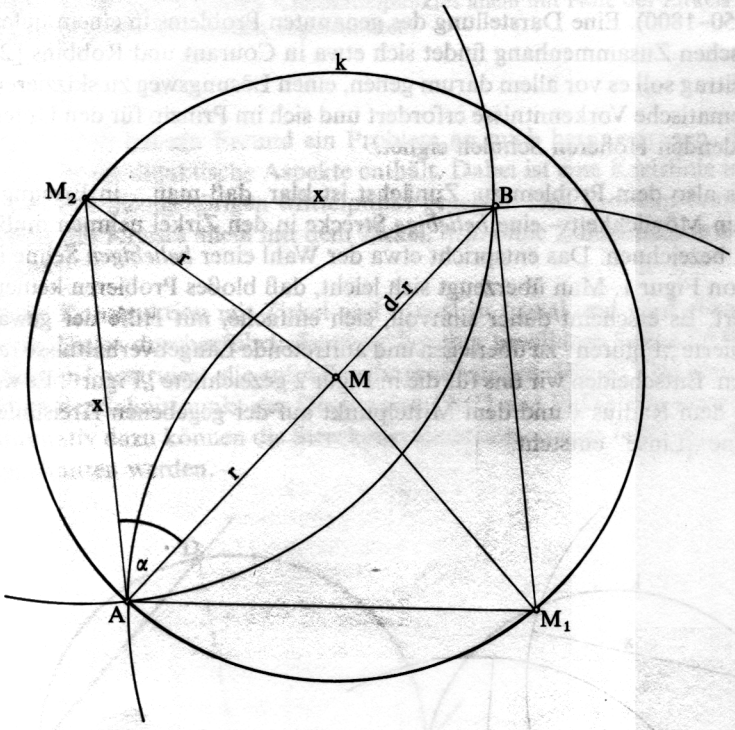

Fig. 3

$d = \overline{AB}$

Die einfachste Art, das einzusehen, kommt genaugenommen ohne Rechnung aus. Es ist dabei notwendig, den gesuchten Mittelpunkt M in einer Zeichnung als gegeben anzunehmen. Dabei ist lediglich $2r > d > r$ anzunehmen, was durch richtiges „Augenmaß" bei der Wahl von x erreicht werden kann. Aus der Figur 3 entnimmt man, daß die beiden gleichschenkeligen Dreiecke ABM_2 und M_2AM zueinander ähnlich sind; sie haben ja den Winkel α gemeinsam. Daher ist das Verhältnis Grundlinie zu Schenkel bei beiden Dreiecken dasselbe:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM_2}} = \frac{\overline{AM_2}}{\overline{AM}},$$

daher

$$d = \frac{x^2}{r}. \tag{2}$$

Das zentrale Motiv, hier weiter zu denken, ist die Einfachheit dieser Relation. Löst man sie nach r auf, also

$$r = \frac{x^2}{d}, \tag{3}$$

so erkennt man sofort, daß gegenüber (2) einfach r und d vertauscht sind! Gibt man der Gleichung die Form

$$rd = x^2. \tag{4}$$

so kann man auch von einer *Symmetrie* in r und d sprechen. Die Lösung des Problems ist nun offensichtlich. Da man x und d kennt (und jederzeit in den Zirkel nehmen kann), wird eine zu Figur 3 inverse Konstruktion durchgeführt: In einem Kreis k′ vom Radius d wird wieder eine „Linse" mit Hilfe zweier Hilfskreise vom Radius x gekennzeichnet (Fig. 4). Der „Durchmesser" $\overline{CD}$ der entstandenen Linse ist aufgrund der Symmetrie in Gleichung (4) gerade der gesuchte Radius r. Damit kann auch der Mittelpunkt des ursprünglichen Kreises konstruiert werden.

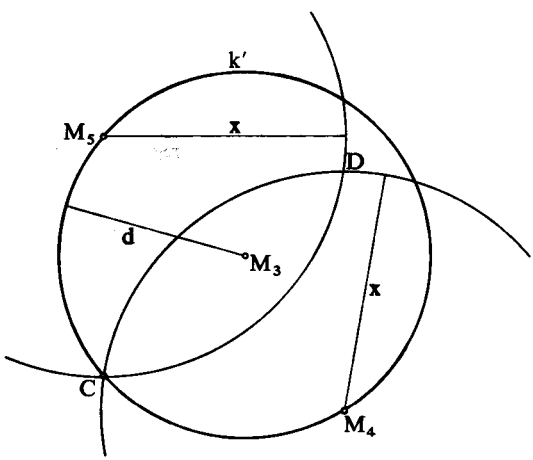

Fig. 4 $r = \overline{CD}$

Die Konstruktion entbehrt nicht einer gewissen Schönheit, kann aber sicher nicht durch rein zeichnerisches Probieren gefunden werden. Sie eignet sich wohl nicht als „normales" Beispiel im Mathematikunterricht an Allgemeinbildenden Höheren Schulen, kann aber – sofern die Schüler hinreichend motiviert sind – unter einer geschickten und zurückhaltenden Anleitung des Lehrers in den Unterricht eingeflochten werden. Durch die erfolgreiche Lösung und eine nachträgliche Diskussion des Weges können einige wichtige Elemente dessen, was man „mathematisches Denken" nennen könnte, verdeutlicht werden:

1. Es ist notwendig, möglichst *einfach* und *klar* zu denken. Der Versuch, besonders komplizierte „Figuren" zu zeichnen, anstatt die einfachsten Figuren auf ihre quantitativen Verhältnisse zu untersuchen, verstellt eher den Blick auf die Lösung.

2. Das „schöpferische" Element stellt die Entscheidung dar, eine „Linse" wie in Figur 2 zu *zeichnen* und deren Durchmesser zu *berechnen*. Die Bereitschaft, vom Zeichnen auf die Berechnung einer Länge – unter der Voraussetzung, der unbekannte Radius r sei bekannt – umzuschwenken, wird wahrscheinlich die größte Hürde sein. Hier muß der Lehrer, ohne einfach den Lösungsweg vorzutragen, mit sparsamen Hinweisen die Phantasie der Schüler anregen.

3. Die Berechnung der Länge d wird am einfachsten durch eine geschickte Bezeichnung der beteiligten Größen und das Erkennen zweier zueinander ähnlicher Dreiecke erreicht. Das ist der besondere Bonus des vorliegenden Problems. Das Argument von Figur 3 kann durchaus von Schülern selbst gefunden oder aber sofort nachvollzogen werden.

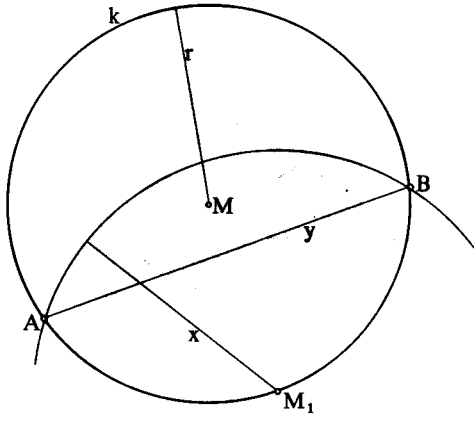

Fig. 5

Hier ist eine ergänzende Bemerkung angebracht. Hätte man statt der Konstruktion von Fig. 2 die noch einfachere Figur in Figur 5 gewählt und die Länge $y = \overline{AB}$ berechnet, so hätte sich die weit weniger attraktive Formel

$$y = \frac{x}{r}\sqrt{4r^2 - x^2}\,.$$

bzw. nach r aufgelöst,

$$r = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 - y^2}}\,.$$

ergeben. Dies ist, im Unterschied zum hier skizzierten Lösungsweg, nur mit erheblich größerer Anstrengung in eine Konstruktion umzumünzen. Es ist Sache des Lehrers, wieweit er die Schüler in die Irre gehen bzw. kompliziertere Lösungswege finden läßt.

4. Das schönste „Aha-Erlebnis" stellt sich wohl ein, wenn die Symmetrie von Formel (4) in r und d erkannt wird. Es liegt auf der Hand, wie wichtig der Spürsinn für das Ausnützen derartiger Symmetrien im mathematischen Denkprozeß ist.

Durch eine kleine Perfektionierung kann die gesamte Konstruktion (Fig. 2 und 4) in *einer* Zeichnung untergebracht werden. Diese kompaktere Form sowie der theoretische Hintergrund der Symmetrie der Gleichung (4) – eine „Inversion am Kreis" – und eine Reihe weiterer Konstruktionen mit dem Zirkel findet sich in den unten angegebenen Büchern.

Ich danke allen Kolleginnen und Kollegen, mit denen ich über das hier behandelte Problem diskutieren konnte.

Anschrift des Verfassers: Dr. Franz Embacher, Institut für Theoretische Physik, Universität Wien, Boltzmanngasse 5, A-1090 Wien

Eingangsdatum: 15. 3. 1986

Literatur

[1] Adler, A.: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig 1906, S. 117f
[2] Courant, R., and H. Robbins: What is Mathematics? London, New York, Toronto: Oxford University Press 1969, S. 140f
[3] Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1981, S. 106