

Mathematik und Modellbildung in der Naturwissenschaft

im Rahmen der Ringvorlesung
„Facetten naturwissenschaftlichen Denkens“
(Erweiterungscurriculum „Naturwissenschaftliches Denken:
Fallbeispiele, Grundlagen und Einflüsse“)

Franz Embacher

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>
franz.embacher@univie.ac.at

Fakultät für Physik der Universität Wien



Universität Wien, 18. März und 8. April 2013

Inhalt

- Zur Bedeutung mathematischer Modelle
- Die Struktur physikalischer Theorien
- Mathematische Modellierung und der Blick hinter die Phänomene
- Vereinfachungen mathematischer Modelle
- Ein mathematisches Modell aus der Biologie

Wozu mathematische Modelle?

Mathematische Modelle

- liefern quantitative (in Zahlen ausdrückbare) Aussagen,
- helfen, vermutete Zusammenhänge möglichst klar (und genau) zu formulieren („Theorien aufzustellen“),
- helfen, die Konsequenzen unserer Theorien zu verstehen,
- helfen bei der empirischen Überprüfung (und bei der Beurteilung deren Zuverlässigkeit),
- zwingen uns, Begriffe zu schärfen und
- helfen uns, zwischen dem *Bild*, das wir uns von einem Sachverhalt machen, und dem *Sachverhalt* selbst zu unterscheiden.

Wozu mathematische Modelle?

Aber:

- Aussagen worüber?
- Zusammenhänge zwischen was?

Mathematische Modelle in den Naturwissenschaften

- beziehen sich auf „die Natur“
- und werden mit Beobachtungen (Messungen) konfrontiert.

Sie sind nicht einfach „wahr“ oder „falsch“.

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

- Das **Fallgesetz** von Galileo Galilei (1636/38):
Ein Körper, der aus der Ruhe zu fallen beginnt, hat nach der Zeitspanne t die Strecke

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

durchfallen. Dabei ist $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

- Beispiel: Die nach 1 Sekunde durchfallene Strecke beträgt

$$s = \frac{9.81}{2} \text{ m} = 4.9 \text{ m.}$$

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

Ein mathematisches Modell besitzt einen **Gültigkeitsbereich** (der u.a. durch **idealisierende Annahmen** zustande kommt).

Welche Annahmen wurden im Fallgesetz getroffen, was alles wird (aus heutiger Sicht) nicht berücksichtigt?

- Der Körper wird als Punktteilchen behandelt.
- Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.
- Die Erdbeschleunigung hängt vom Ort auf der Erde ab, da die Erde keine exakte Kugel ist.
- Auch während des Fallens ist g nicht konstant. (Warum?)
- ...

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

Ein mathematisches Modell besitzt eine **innere Logik**, die unabhängig vom Gültigkeitsbereich ist.

- Aus dem Fallgesetz folgt

$$v = g t$$

(Geschwindigkeit wächst proportional zur Zeit).

- Weiters folgt

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{g t}{2} = \frac{v}{2}$$

(Durchschnittsgeschwindigkeit = $\frac{1}{2}$ * Momentangeschwindigkeit).

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

- Wie schnell bewegt sich der Körper nach einem Jahr?
Berechnung \rightarrow 310 000 km/s.
(Lichtgeschwindigkeit = 300 000 km/s)
- Hat eine solche Frage einen Sinn?

Ja!

- In der Nähe eines **Neutronensterns** ist die Schwerebeschleunigung um einen Faktor

$$10^{11}$$

größer als auf der Erde. Ein fallender Körper erreicht (nach dem Fallgesetz) bereits nach einer Tausendstel Sekunde Überlichtgeschwindigkeit!

- Das Fallgesetz ist **nicht-relativistisch**, d.h. es ignoriert die Relativitätstheorie!

Mathematische Modelle in der Physik

Mathematische Modelle in der Physik

- sind im allgemeinen komplexer und umfassender als das Fallgesetz,
- haben aber eine **grundsätzlich ähnliche logische Struktur!**

Struktur physikalischer Theorien

Anliegen der Physik:

- möglichst viele Phänomene durch möglichst wenige Grundannahmen („physikalischer Gesetze“) verstehen und erklären
- „dem Alten über die Schulter schauen“ (Einstein)
- physikalische Gesetze mathematisch formulieren
- soweit möglich: „vereinheitlichen“!

Beispiel einer Vereinheitlichung:

elektrische Phänomene
magnetische Phänomene



elektromagnetische
Phänomene
(Maxwell, 1865)

Fundamentale physikalische Gesetze

Die fundamentalen physikalischen Gesetze
(aus heutiger Sicht):

- Es gibt drei/vier **fundamentale Wechselwirkungen** in der Natur:
 - die elektromagnetische
 - die schwache } die „elektroschwache“
 - die starke
 - die Gravitation (Schwerkraft).
- Sie wirken zwischen **Elementarteilchen**
 - Leptonen (Elektron, Neutrino,...)
 - Quarks (deren Bindungszustände → Protonen, Neutronen,...)
 - Austauschteilchen (Photon,...)

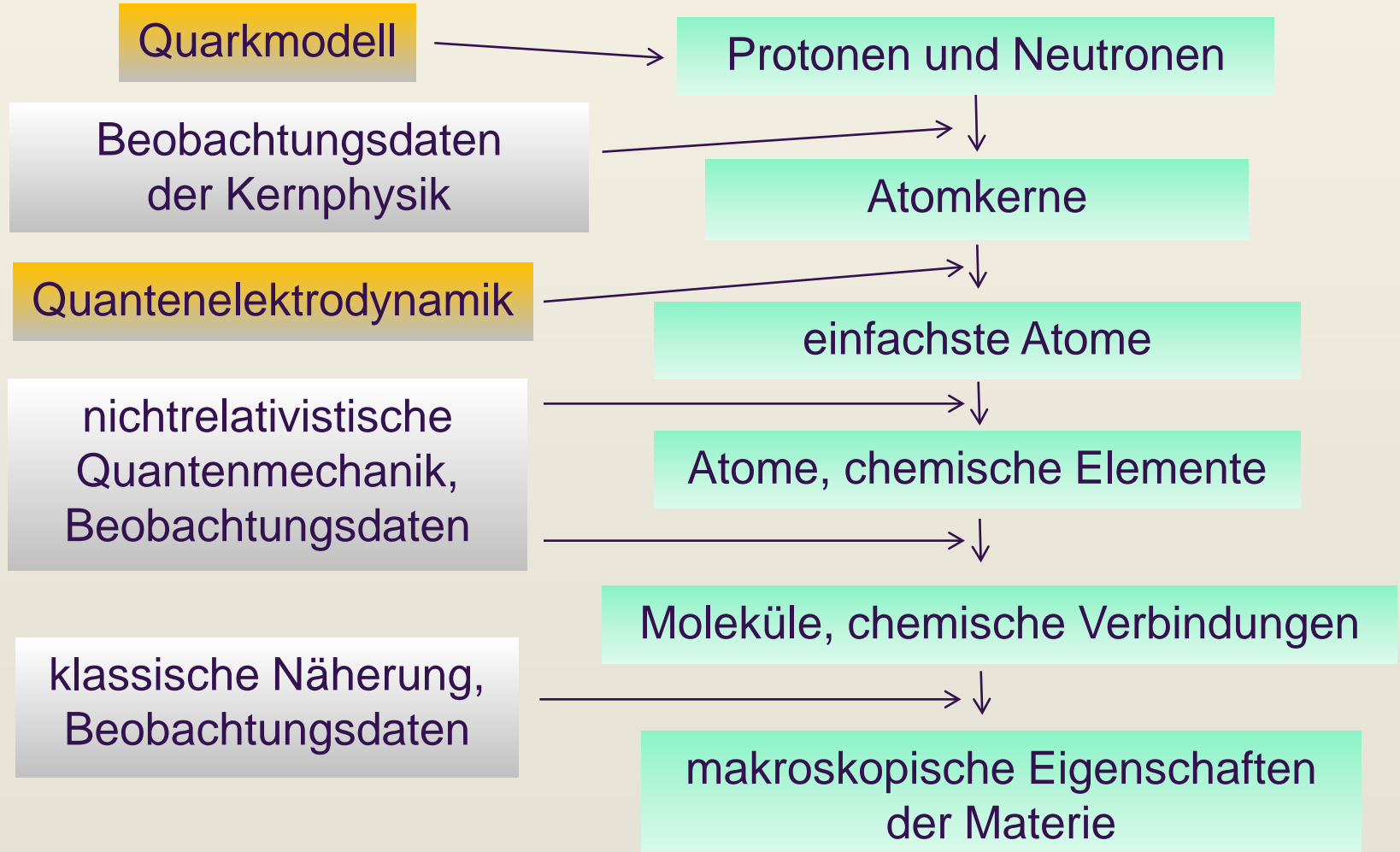
Fundamentale physikalische Gesetze

- Es gelten „übergeordnete“ Prinzipien:
 - **Spezielle Relativitätstheorie** (sofern die Gravitation nicht berücksichtigt wird)
 - **Allgemeine Relativitätstheorie** (sofern die Gravitation berücksichtigt wird)
 - **Quantentheorie**

Das größte bestehende Problem: bis heute ist es nicht gelungen, die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie zu einer „**Quantengravitation**“ zu vereinigen. Von diesem Problem abgesehen, sollten die meisten beobachtbaren physikalischen Phänomene **im Prinzip** auf der Basis dieser „fundamentalen Physik“ erklärt werden können. Aber eben nur „im Prinzip“, denn die mathematischen Schwierigkeiten sind enorm!

Physikalische Theorien

In der Praxis funktioniert das nicht immer! Beispiel:



Physikalische Theorien

- Fortschritt in der Erkenntnisgewinnung, Theoriebildung und Vereinheitlichung führt nicht zu weniger, sondern zu **mehr** physikalischen Teildisziplinen!
 - Sie alle besitzen
 - ihre speziellen Grundannahmen (Idealisierungen und **zentrale Konzepte**, „**Grundgleichungen**“)
 - ihre speziellen theoretischen **Methoden** und **Fragestellungen**,
 - ihre speziellen experimentellen Methoden
 - und bestimmte Beziehungen zu anderen Teilgebieten.
- breite **Vernetzung**

Rolle der Mathematik
in der modernen Physik!

Beispiel für eine physikalische Theorie

Die **Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus**

(James Clerk Maxwell, 1865)

- zentrale Objekte: elektromagnetisches Feld und elektrisch geladene Teilchen bzw. kontinuierliche Ladungsverteilungen
- ignoriert die Quantentheorie
- macht keine Annahmen über das heute bekannte Teilchenspektrum
- ignoriert andere Wechselwirkungen
- besitzt (gemeinsam mit einigen Tatsachen, die sie nicht „aus sich heraus“ kennt) ein **extrem breites Erklärungspotential**:
 - Gewitter, Elektrotechnik und Elektronik, elektromagnetische Wellen (Licht!), Atome, Moleküle und die Vielfalt der chemischen Elemente, Flüssigkeiten, Festkörper,...

Beispiel für eine physikalische Theorie

Die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sind die (vielleicht) folgenreichste wissenschaftliche Errungenschaft überhaupt!

Was sagt eine Theorie voraus?

Es ist oft schwierig, das herauszufinden! Beispiele:

- **Allgemeine Relativitätstheorie** („Materie krümmt die Raumzeit“):
 - Lichtablenkung (1915)
 - Dynamik kollabierender Sterne (1960er-Jahre!)
Einzelheiten bis heute unklar!
- Quarkmodell („**Quantenchromodynamik**“)
 - bisher erst die Grundprinzipien dargelegt!

Blick hinter die Phänomene

Moderne physikalische Theorien sind „**unanschaulich**“ und laufen oft unseren Alltagsanschauungen zuwider!

- Spezielle Relativitätstheorie ($c = \text{const}$)
- Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie: Expansion des Universums
- Quantentheorie: Messgrößen können unbestimmt sein!

Die mathematische Formulierung hilft, **unanschauliche physikalische Gesetze in den Griff zu bekommen und korrekt mit ihnen umzugehen!** Die Betrachtung vereinfachter Modelle kann das **Wesentliche einer Abstraktion** zutage fördern.

Blick hinter die Phänomene

Beispiel:

- Spezielle Relativitätstheorie: Postulate und die „Relativität der Zeit“ ... auch mit einfacher Mathematik zu verstehen!

→ [Spezielle Relativitätstheorie \(Online-Skriptum\)](http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/)

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/>

Blick hinter die Phänomene

Beispiele:

- Allgemeine Relativitätstheorie: das Konzept der Krümmung

→ Die Wanze auf der heißen Ofenplatte

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EinsteinRechnet/Kruemmung.html>

- Quantentheorie: Unbestimmtheit physikalischer Messgrößen

→ Quanten-Gickse

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Quantentheorie/gicks/>

Vereinfachte Modelle und Visualisierungen helfen uns, uns ein intuitives Bild von dem zu machen, was wir *berechnen*.

→ „Ersatzvorstellungen“

Der Blick von einer „höheren“ Perspektive

Beispiel:

- 1905: Albert Einstein veröffentlicht die Spezielle Relativitätstheorie.
- 1908: Hermann Minkowski plädiert für das Konzept der **vierdimensionalen Raumzeit**. Von einem **vierdimensionalen** Standpunkt aus betrachtet (wenn man ihn erst einmal erreicht hat), erscheint die neue Theorie viel einfacher und natürlicher!
Einstein bemerkt (nicht ganz im Ernst), jetzt verstehe er seine eigene Theorie nicht mehr.
- 1915: Einstein veröffentlicht die auf der Basis des **vierdimensionalen** Raumzeit-Konzepts entwickelte Allgemeine Relativitätstheorie.

Mathematik in der Physik: Zusammenfassung

Mathematik in der Physik erlaubt uns,

- Zusammenhänge klar zu formulieren,
- quantitative Vorhersagen zu machen und zu überprüfen,
- die innere Logik von Modellen zu erforschen,
- physikalische Gesetze zu „vereinheitlichen“, d.h. mehr Phänomene aus weniger Grundannahmen heraus zu verstehen und zu erklären,
- die Konsequenzen unserer eigenen Theorien herauszuarbeiten,
- unanschauliche physikalische Gesetze in den Griff zu bekommen und
- einen „höheren“ Standpunkt einzunehmen, von dem aus betrachtet die Dinge wieder einfacher erscheinen.

Vereinfachungen mathematischer Modelle

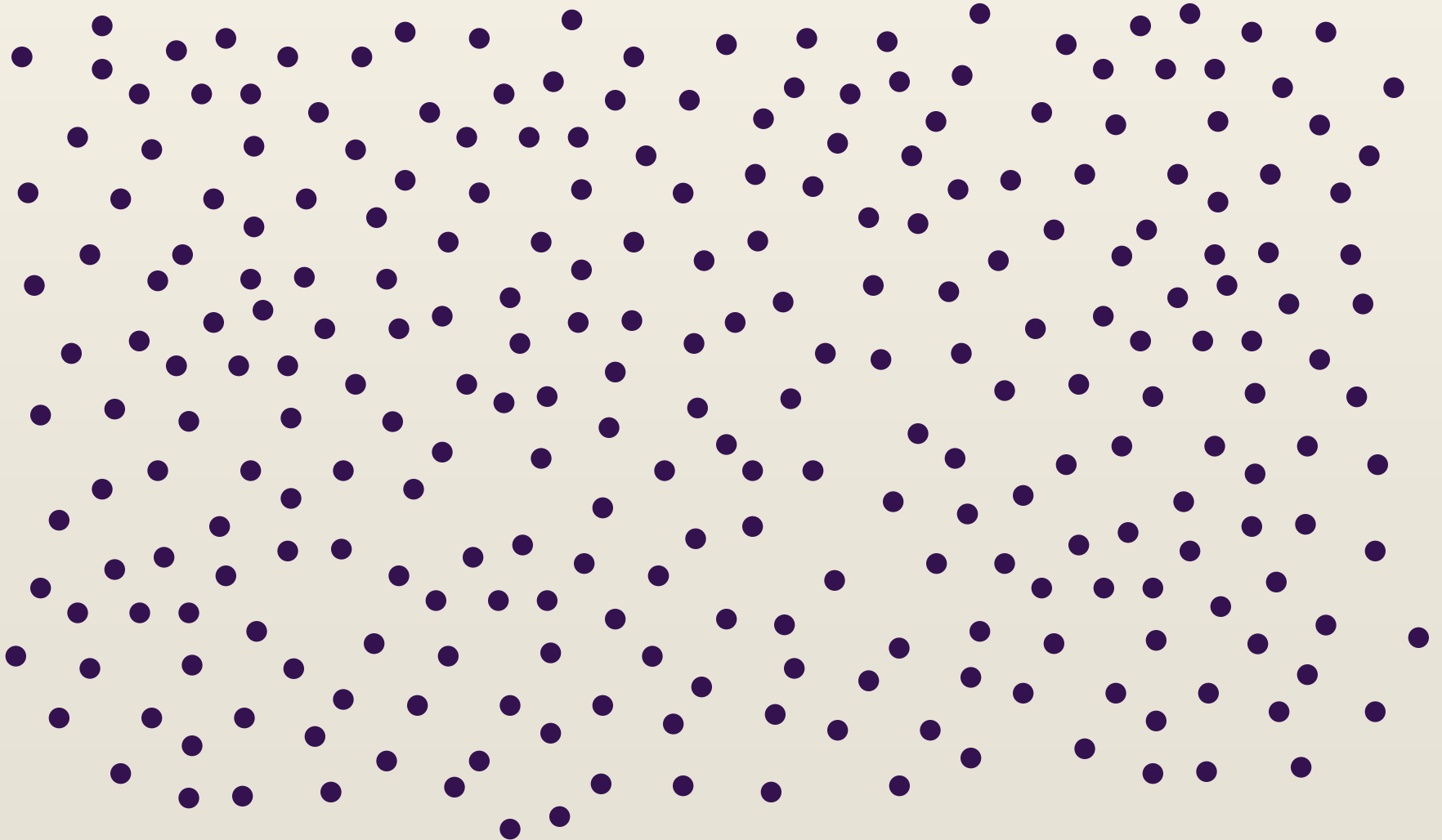
Mathematische Modelle können oft

- vereinfacht dargestellt
- oder vereinfacht hergeleitet

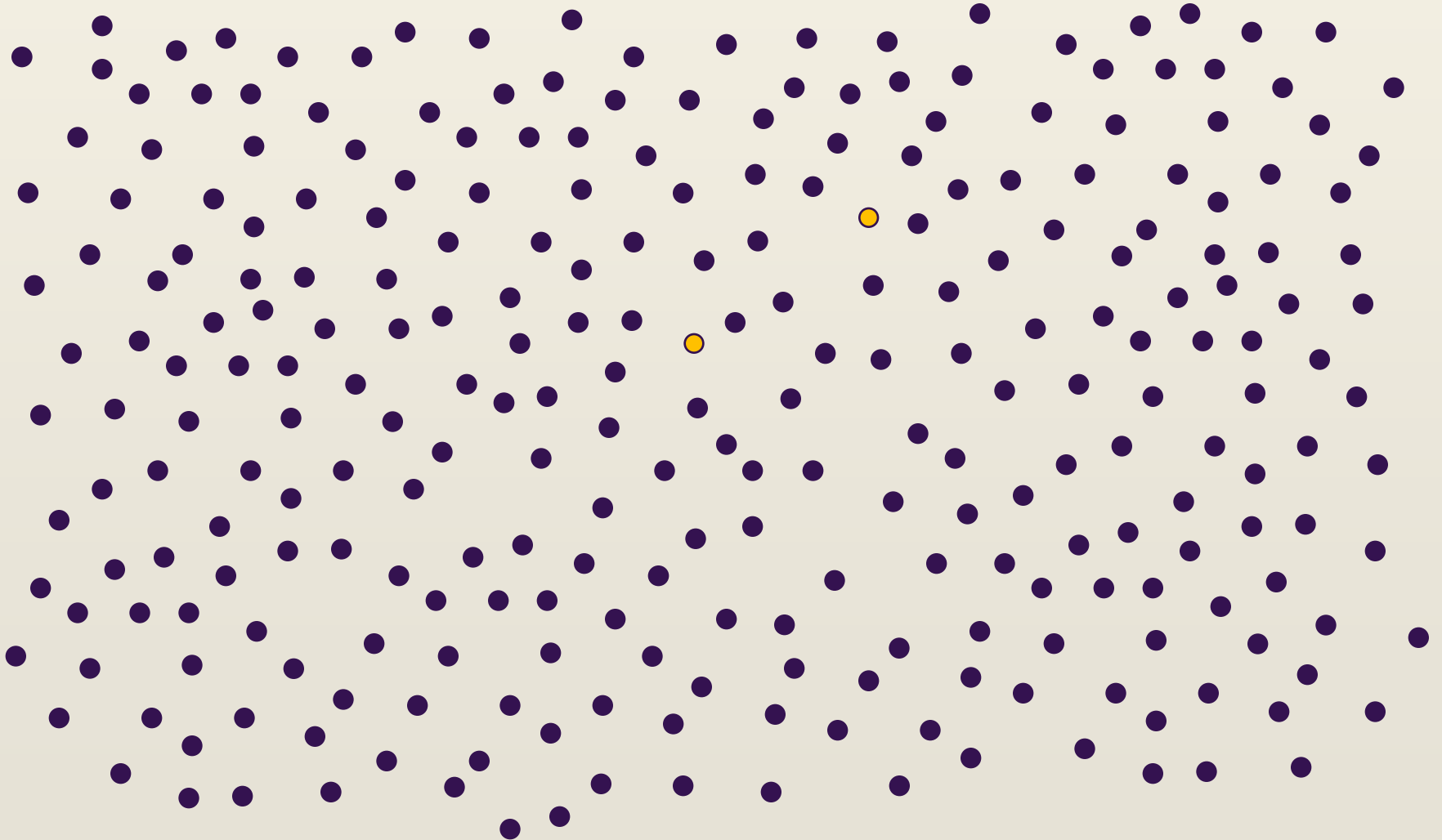
werden.

Beispiel für eine vereinfachte Herleitung

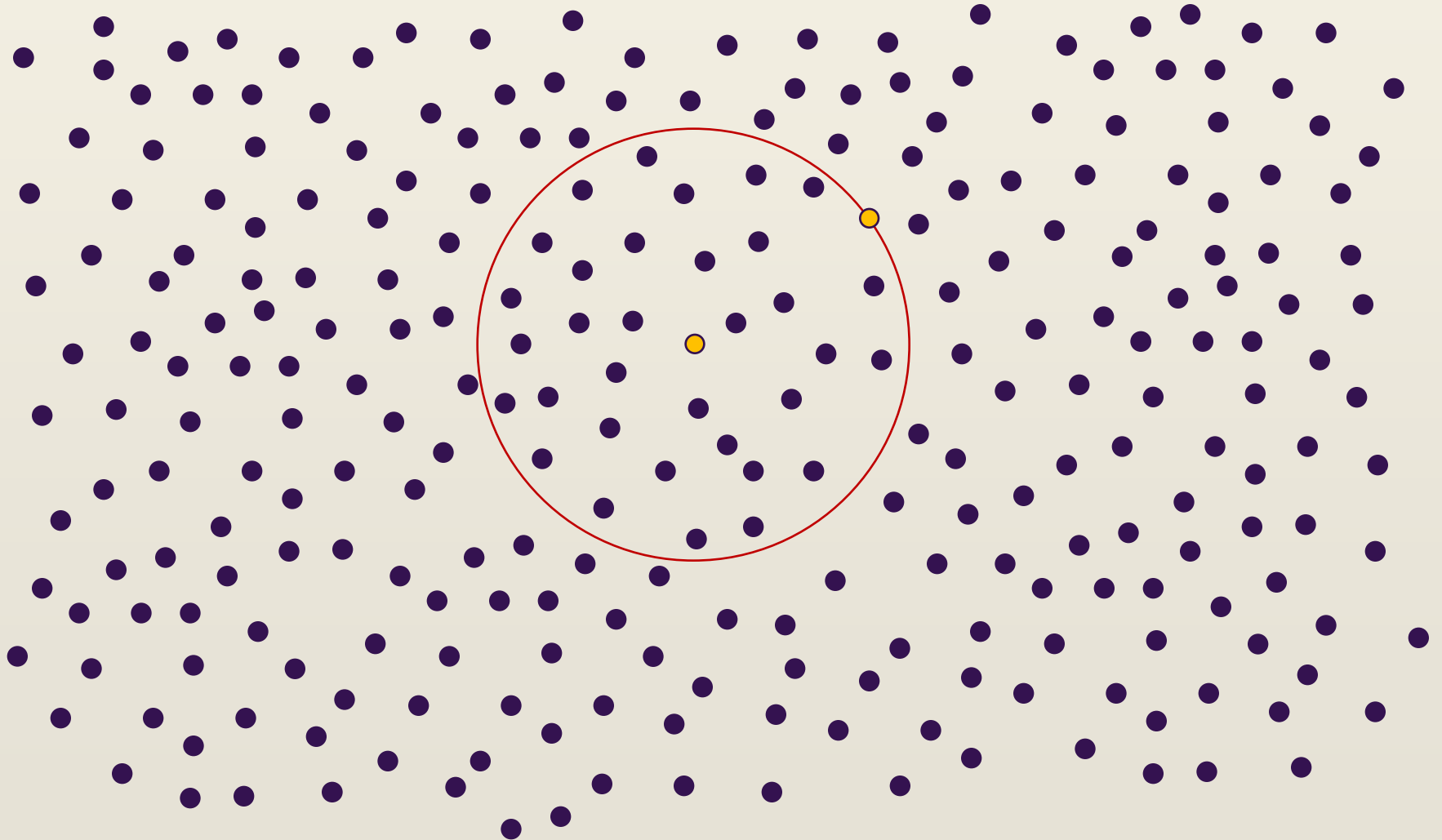
Die Expansion des Universums – eine „Newtonsche“ Argumentation!



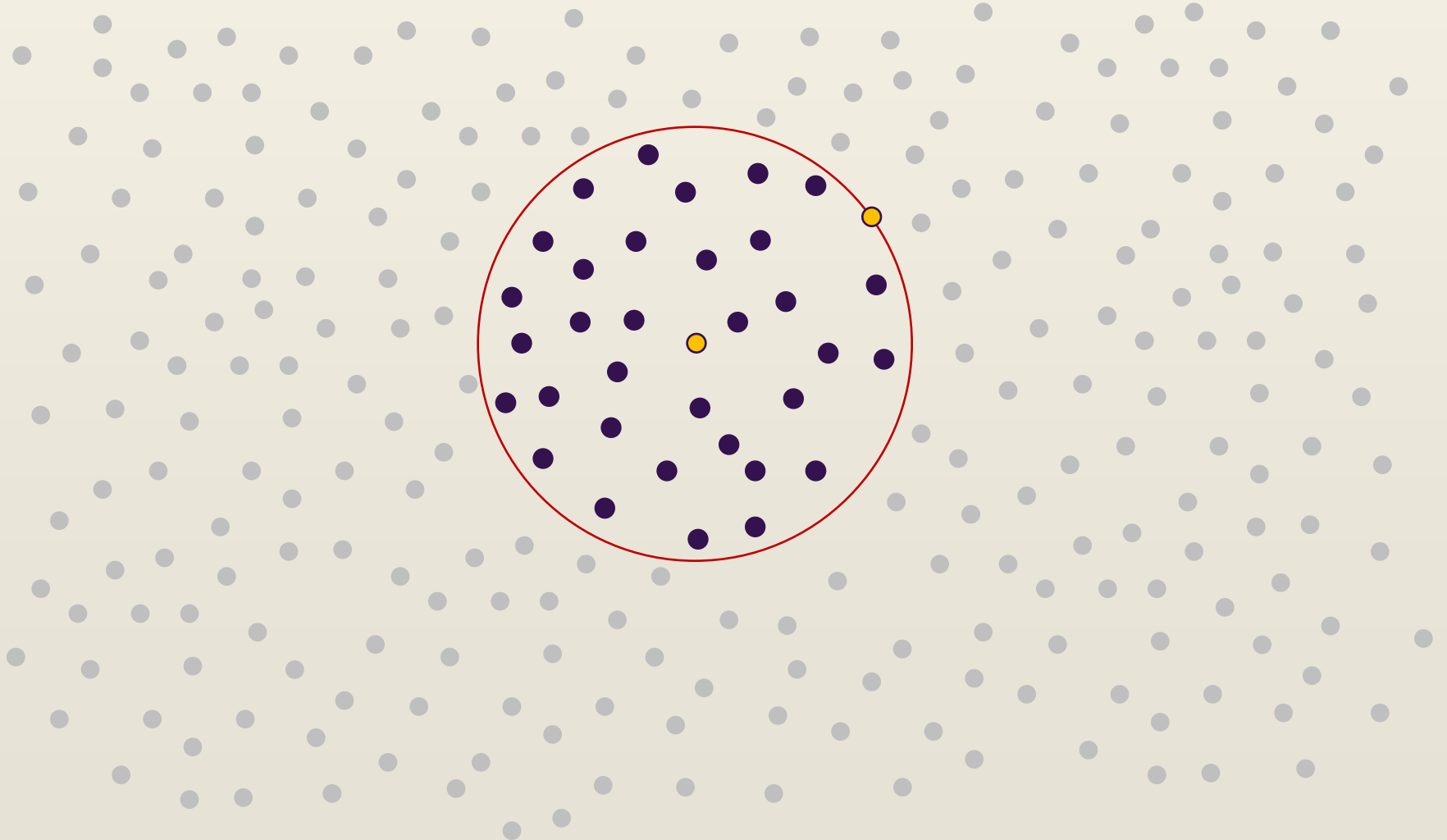
Die Expansion des Universums in der Theorie



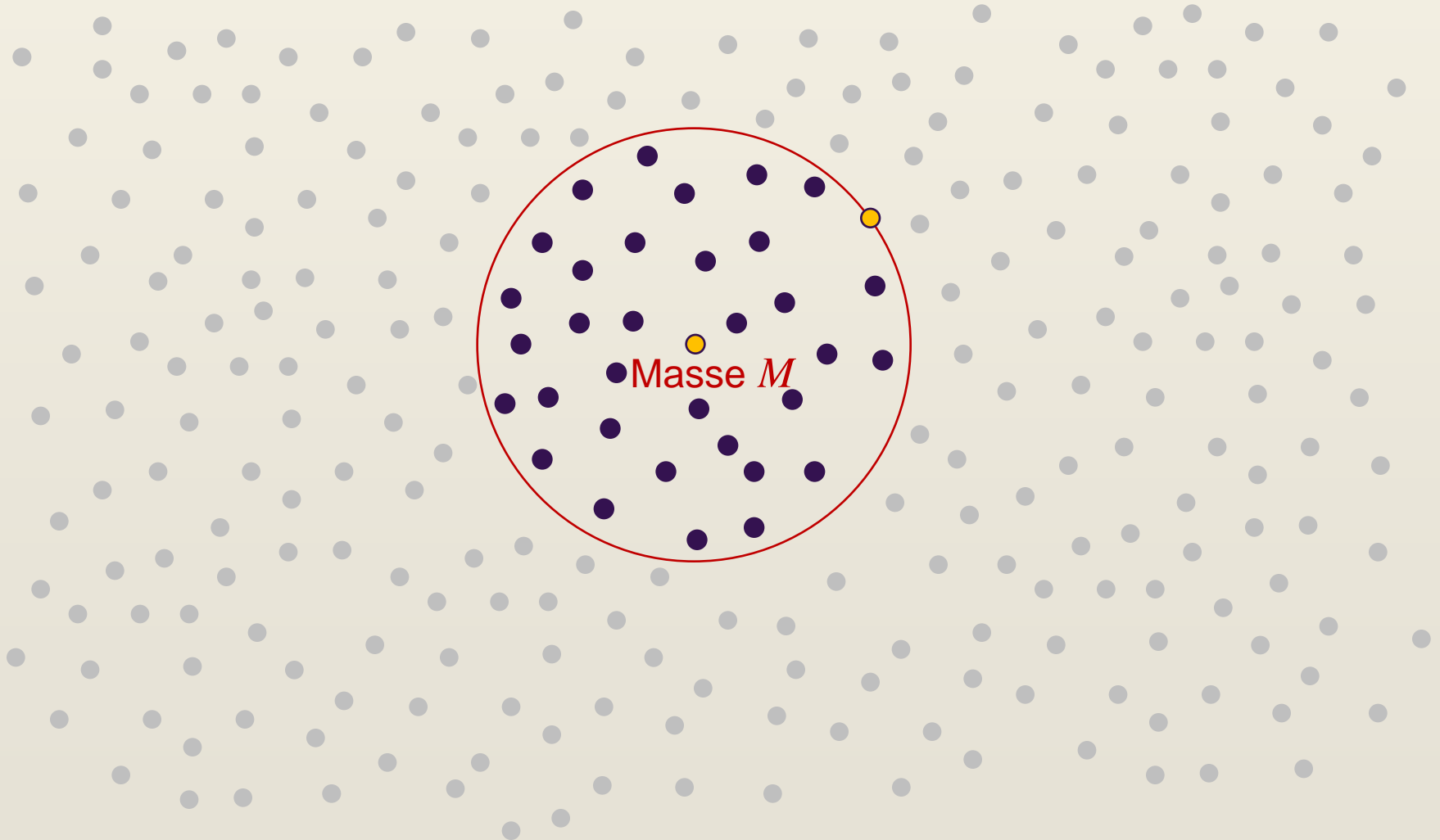
Die Expansion des Universums in der Theorie



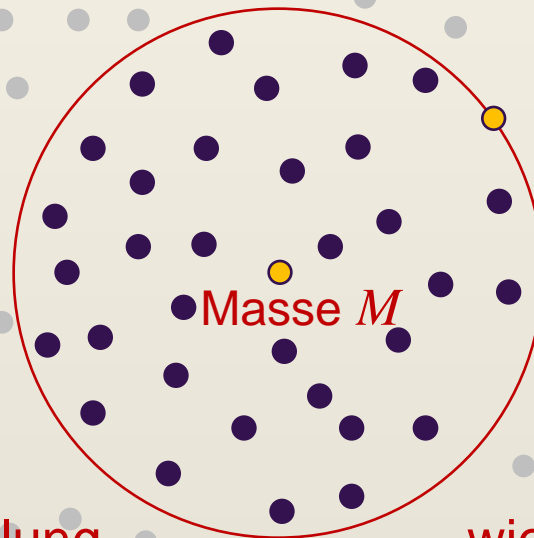
Die Expansion des Universums in der Theorie



Die Expansion des Universums in der Theorie



Die Expansion des Universums in der Theorie



- gleiche Zeitentwicklung wie die Bewegung einer Probemasse im Gravitationsfeld einer Punktmasse M !
- Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert das gleiche Resultat!
- Mathematische Erkenntnis „ohne Formeln“!

Ein mathematisches Modell aus der Biologie

Mathematische Modellbildung spielt auch in – vermeintlich „weicheren“ – Naturwissenschaften eine wichtige Rolle! Dies sei anhand eines Beispiels aus der **Evolutionbiologie** verdeutlicht:

In der Natur gibt es „**altruistisches**“ (aufopferndes) Verhalten. Wie können sich Gene, die ihre Träger zu einem solchen Verhalten veranlassen, in einer Population ausbreiten?

Wieso begünstigt die Evolution nicht (immer) die Egoisten?

Die Mendelschen Vererbungsregeln

Siehe

→ Mendel und die Mathematik der Vererbung

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Vererbung.html>

Das Selbstmörder-Gen

Mathematisches Modell:

- Betrachten Gruppen von Geschwistern, die manchmal in große Gefahr kommen.
- Ein Individuum (X) hat ein Allel, das es zur Rettung seiner Geschwister veranlasst, wobei es (statt seiner Geschwister) stirbt!
- Kann sich dieses Allel („Selbstmörder-Gen“) in der Population ausbreiten?

Beachte:

- Jedes Geschwister trägt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das „Selbstmörder-Gen“ ebenfalls!

Das Selbstmörder-Gen

Allel zur „Rettung von n Geschwistern“

- $n = 1$
- $n = 2$
- $n = 3$

Das Selbstmörder-Gen

Ergebnis:

Allel zur Rettung von	durchschnittliche Anzahl der pro Aufopferung geretteten Kopien des Allels	Erfolg in der Population
1 Geschwister	1/2	schlecht
2 Geschwister	1	neutral
3 Geschwister	3/2	gut

→ Ein „Allel zur Rettung von 3 Geschwistern“ wird sich in der Population ausbreiten!

Das Selbstmörder-Gen

Daraus lernen wir:

- Wird in die Reproduktion von verwandten Individuen investiert anstatt in die eigene, so wird damit auch für den Erfolg von Allelen, die man **selbst** besitzt, gearbeitet.
- Wege zu einer realistischeren Modellierung.

Ähnliche Modelle:

- [Bienen, Wespen und Ameisen](http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Verwandtschaft1.html#Bienen)
<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Verwandtschaft1.html#Bienen>
- Rettung von bedrohten Tierarten, die nur mehr durch wenige Exemplare vertreten sind (Vermeidung von Inzucht-Schäden)

Danke...

... für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation finden Sie im Web unter

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/MathematikNawi/>

