Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 11

1. Stellen Sie eine handliche Formel für den Gradienten einer radialsymmetrischen Funktion in drei Variablen, d.h. einer Funktion der Form $f : \mathbf{x} \mapsto V(\|\mathbf{x}\|)$ mit $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar, auf! Wenden Sie sie auf die Funktion $f : \mathbf{x} \mapsto \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ an!

2. Die (zeitunabhängige) Strömung einer Flüssigkeit wird durch ihr (differenzierbares) Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben, d.h. $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkt $\mathbf{x}$. Im Punkt $\mathbf{p} = (2, 1, 4)^T$ beträgt die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = (-1, 2, 3)^T$. Die Jacobi-Matrix der Funktion $\mathbf{v}$ im Punkt $\mathbf{p}$ ist ebenfalls bekannt: Sie ist gegeben durch
$$\mathbf{J}_\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie näherungsweise die Geschwindigkeit im Punkt $\mathbf{q} = (2.01, 0.99, 4.02)^T$, so gut es mit diesen Angaben möglich ist!

3. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 3\,z^2 \\ 2\,x\,y - z^2 \end{pmatrix}$$
im Punkt $(1, 2, 3)^T$.

4. Zwischen vier Größen r, s, u und v bestehe der Zusammenhang
$$\begin{aligned} r^2 + \sin(\pi\, r\, s) &= u \\ r + \frac{3}{s} &= v\,. \end{aligned}$$
Man möchte dieses Gleichungssystem gern „nach r und s auflösen“, d.h. r und s als Funktionen von u und v darstellen, aber das ist leider mit einer geschlossenen Formel nicht möglich. Immerhin gibt es eine Lösung: Für $(u, v) = (4, 3)$ erfüllt $(r, s) = (2, 3)$ das Gleichungssystem. (Überprüfen Sie das!) Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen, dass es eine Umgebung A des Punktes $(4, 3)$ gibt, sodass das Gleichungssystem für jedes $(u, v) \in A$ eine Lösung (r, s) besitzt!

5. Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3 - x + y - 2y^2 - x\,y - y^3.$$

6. Untersuchen Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; g(x,y) = 4 - x^2 + y + 2y^2 + y^3$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte, indem Sie (i) die kritischen Punkte ermitteln, d.h. die Punkte, an denen der Gradient verschwindet, und (ii) die Hesse-Matrix an diesen Punkten berechnen und entsprechende Schlüsse ziehen!

7. Dasselbe wie in Aufgabe 6 mit der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; h(x,y) = (x-2)\, e^{x\,y}.$$

8. Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte zweimal stetig differenzierbare Funktion an, die im Punkt $(-3,4)$ ein isoliertes Minimum annimmt und deren Hesse-Matrix in diesem Punkt gleich $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist!

9. Untersuchen Sie die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; \psi(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$$

auf lokale Extrema! Wie unterscheiden sich die hier auftretenden lokalen Extrema von den im Buch behandelten? Wie unterscheidet sich die Hesse-Matrix an den kritischen Punkten von den im Buch behandelten Beispielen? Die Funktion ψ spielt im Standardmodell der Elementarteilchenphysik eine wichtige Rolle. Sie heißt *Higgs-Potential*, wird aber auch *Mexican hat potential* genannt. Warum?

10. Welche Punkte der Parabel $y = x^2 - 1$ liegen dem Ursprung $(0,0)$ am nächsten? Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Arten:

    (a) Die Methode, die man in der Schule anwenden würde:

    Zielfunktion, zunächst in zwei Variablen: $f(x,y) =$ Abstand(squadrat) von (x,y) zum Ursprung.
    Nebenbedingung: $g(x,y) = 0$ (Parabelgleichung).
    Man löst die Nebenbedingung nach einer Variable auf, setzt in $f(x,y)$ ein und erhält eine Zielfunktion in nur einer Variablen, die (nicht ganz korrekt) meist ebenfalls mit f bezeichnet wird.

    (b) Alternative Methode: Zeichnen Sie die Parabel und alle Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, die die Parabel berühren!

    Argumentieren Sie, dass die Gradienten der Funktionen f und g in den Berührpunkten zueinander parallel sind.
    Lösen Sie daher das Gleichungssystem

    $$\begin{aligned} &\mathbf{grad}\, f(x,y) = \lambda\, \mathbf{grad}\, g(x,y) \\ &g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

    nach (x,y,λ).