Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 10

1. Definition: Wir sagen, dass die Folge $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ mit $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^2$ gegen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\| = 0$ gilt. Man schreibt dann $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{p}$ oder $\mathbf{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{p}$.

   Beweisen Sie: Eine Folge $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ mit $\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert genau dann gegen $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, wenn

   $$\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} = p_1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = p_2 \,,$$

   d.h. wenn *komponentenweise* Konvergenz vorliegt.

2. Untersuchen Sie das Verhalten der (auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten) Funktion

   $$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1({x_1}^2 - 3\,{x_2}^2)}{{x_1}^2 + {x_2}^2} & \text{wenn } (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   in der Nähe des Punktes $(0,0)$. Rechnen Sie sie dazu in Polarkoordinaten um und erstellen einen Plot des Graphen mit einem Computerprogramm Ihrer Wahl! Zeigen Sie, dass f im Punkt 0 stetig ist! Existieren in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen? Besitzt der Graph eine Tangentialebene? Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

3. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2 - x$$

   im Punkt $\mathbf{p} = (1, 2, f(1,2))$. Überprüfen Sie, ob die Punkte $\mathbf{A} = (3,1,7)$ und $\mathbf{B} = (2,-3,12)$ auf dieser Tangentialebene liegen!

4. Auf einer ebenen Platte, die mit einem Koordinatensystem versehen ist, herrscht am Punkt (x,y) die Temperatur $T(x,y)$. Die Funktion T ist differenzierbar. Ihr Wert und ihr Gradient am Punkt $\mathbf{p} = (1,4)$ sind bekannt:

   $$T(\mathbf{p}) = 320$$
   $$(\mathbf{grad}\,T)(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Um zum Punkt $\mathbf{q}$ zu gelangen, geht man von $\mathbf{p}$ aus in Richtung des Vektors $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Strecke der Länge $\frac{1}{2}$. Ermitteln Sie $T(\mathbf{q})$ näherungsweise, so gut es mit den angegebenen Informationen geht!

5. Beweisen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\,f\big(x_1(t),x_2(t)\big)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t),x_2(t)\big)\,\frac{dx_1}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1(t),x_2(t)\big)\,\frac{dx_2}{dt}(t)$$

oder, in kompakter Form angeschrieben,

$$\frac{d}{dt}\,f(\mathbf{x}(t))=(\mathbf{grad}f)(\mathbf{x}(t))\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t),$$

wobei alle auftretenden Funktionen differenzierbar seien! (Es handelt sich natürlich um eine Verallgemeinerung der Ihnen bekannten *Kettenregel* für Funktionen in einer Variablen.)

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass f genau dann im Punkt $\mathbf{x_0}\in\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, wenn es eine Funktion s gibt mit $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x_0})+(\mathbf{grad}f)(\mathbf{x_0})\,\cdot\,(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})+\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|\,s(\mathbf{x})$ und $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} s(\mathbf{x})=0$. Damit untersuchen Sie, wie sich der Differenzenquotient

$$\frac{f(\mathbf{x}(t))-f(\mathbf{x}(t_0))}{t-t_0}$$

für $t\to t_0$ verhält, um zu zeigen, dass die obige Beziehung an einer vorab gewählten Stelle t_0 gilt. Da t_0 beliebig ist, gilt die Beziehung dann für alle t.

6. Wie Sie bereits wissen (und vielleicht schon bei der Lösung einer anderen Aufgabe dieses Blatts angewandt haben), ist die Richtungsableitung einer differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ am Punkt $\mathbf{p}$ in Richtung $\widehat{\mathbf{a}}$ (d.h. in Richtung des Einheitsvektors $\widehat{\mathbf{a}}$) durch

$$\widehat{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{grad}f)(\mathbf{p})$$

gegeben. Um sie berechnen zu können, muss man neben $\widehat{\mathbf{a}}$ also nur noch $(\mathbf{grad}f)(\mathbf{p})$ kennen.

Nun fragt jemand: Im Gradienten von f sind die Änderungsraten der Funktion f in die Richtungen der Koordinatenachsen zusammengefasst. Woher „weiß“ der Gradient, wie sich f verhält, wenn man von $\mathbf{p}$ aus in eine *andere* Richtung $\widehat{\mathbf{a}}$ geht? Was würden Sie antworten?

7. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

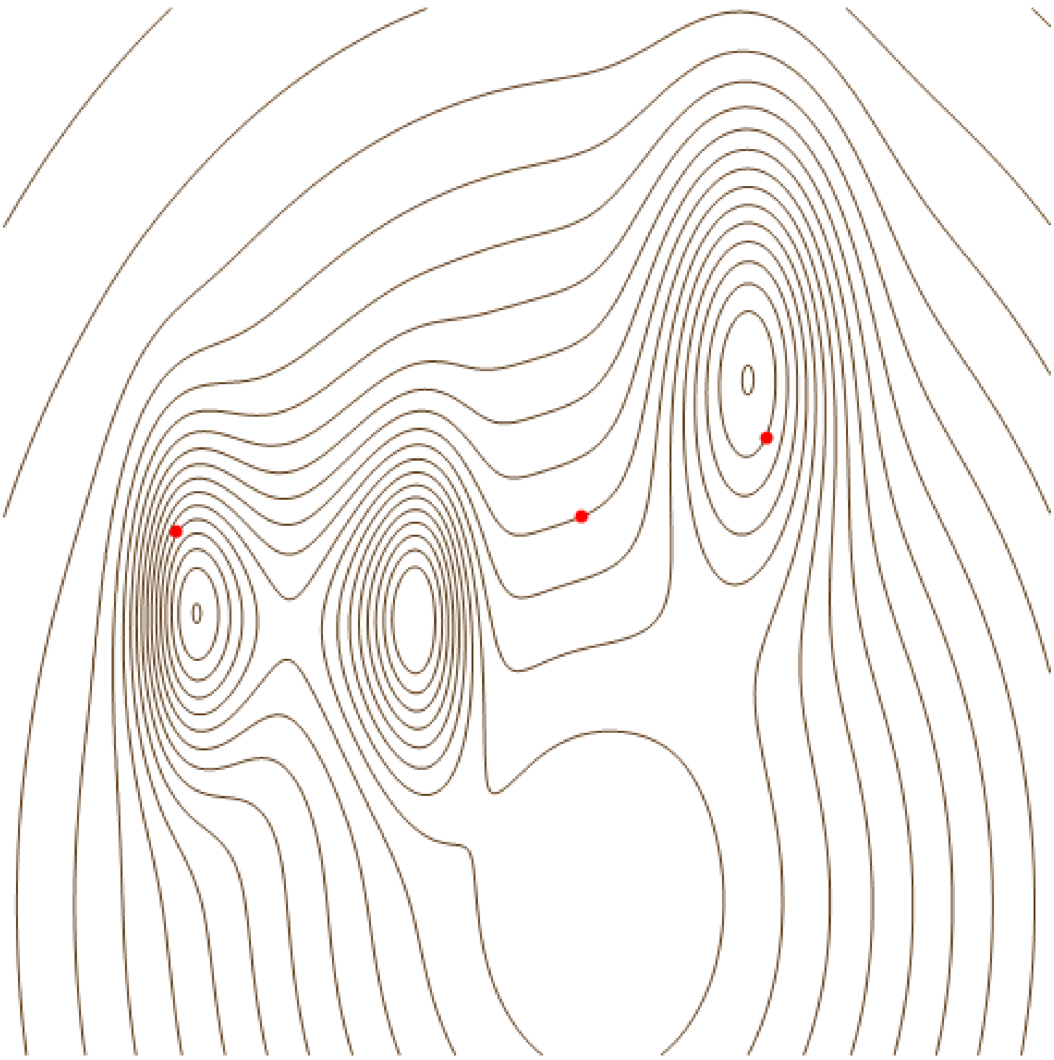
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,y)=x^2-y+1$$

und verifizieren Sie, dass er in jedem Punkt auf die durch diesen Punkt verlaufende Höhenlinie von g normal steht! Machen Sie eine Skizze zu diesem Sachverhalt!

8. Ist der Sachverhalt von Aufgabe 7 (Gradient $\perp$ Höhenlinien) ein Zufall oder steckt da mehr dahinter? Stellen Sie eine Vermutung auf und versuchen Sie einen Beweis oder eine Beweisidee!

Tipp: Denken Sie sich eine Höhenlinie in Parameterdarstellung $t\mapsto\mathbf{x}(t)$ geschrieben und benutzen Sie die Kettenregel von Aufgabe 5!

9. Die folgende Abbildung zeigt die Höhenlinien einer Landschaft, in der drei Berge besonders herausstechen. Benachbarte Linien entsprechen gleichen Höhenunterschieden.



Die Landschaft wird durch eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) =$ Seehöhe im Punkt (x, y) modelliert. Was weiß man nun über das Aussehen der Landschaft? Beschreiben Sie! Welcher der drei Berge ist am höchsten? Zeichnen Sie an den drei markierten Punkte Pfeile, die die Richtung des Gradienten von f im jeweiligen Punkt angeben! Ihre Längenverhältnisse sollen den Verhältnissen der Beträge der Gradienten entsprechen.

10. Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \exp\left(x_1 - {x_2}^2\right)$ in eine Potenzreihe um $(0, 0)$ bis zur dritten Ordnung!

    Tipp: Wenn Sie es geschickt anstellen und die Taylorreihe der Exponentialfunktion kennen, handelt es sich dabei um einen Zweizeiler. Sie müssen dafür keine partiellen Ableitungen berechnen!