Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 8

1. Ist die Abbildung
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto x_1\, y_1 - \frac{1}{2}\, x_2\, y_2$$
ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie!

2. Ist die Abbildung
$$\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathrm{Sp}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$$
($\mathrm{Sp} =$ Spur) ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$? Begründen Sie!

3. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}$ heißt *lineares Funktional* auf V. Die Menge aller linearen Funktionale auf V wird der *Dualraum* von V genannt und mit dem Symbol V^* bezeichnet. Er ist ebenfalls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n.

   Zeigen Sie: Für jedes $\rho \in (\mathbb{R}^n)^*$ existiert ein $\mathbf{u}_\rho \in \mathbb{R}^n$, sodass
$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$
   wobei $\cdot$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. (Das bedeutet, dass die Wirkung von ρ als „bilde das Skalarprodukt mit u_ρ" beschrieben werden kann.) Zeigen Sie weiters, dass $\mathbf{u}_\rho$ durch ρ eindeutig bestimmt ist!

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\Big(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2\Big).$$

5. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt:
$$2\Big(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\Big) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$
   Was bedeutet das für die Geometrie des Parallelogramms?
   (Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelogrammgleichung.)

6. Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ sei definiert als die Menge aller $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, für die gilt: $x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 0$ und $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Geben Sie eine ON-Basis von U und eine ON-Basis von $U^\perp$ an!

   Achtung: Hier kommen keine „schönen Zahlen" heraus. Für die nötigen Operationen mit Vektoren können Sie bei Bedarf ein CAS verwenden!

7. Der Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynomfunktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 sei mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} := \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, \mathbf{q}(x)\, dx$$

ausgestattet. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ mit $\mathbf{u}_j : x \mapsto x^j$ (für $j = 0, 1, 2$) an, um eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2$ zu finden!

Kommen die Polynome, die Sie auf diese Weise erhalten, irgendwo im Buch vor?

8. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension n, und seien $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n \in V$. Zeigen Sie: Falls

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_j)\ \mathbf{d}_j = \mathbf{v} \qquad \text{für alle } \mathbf{v} \in V,$$

so ist $\{\mathbf{d}_1, \ldots \mathbf{d}_n\}$ eine ON-Basis von V.

Anmerkung: Die angegebene Beziehung heißt „Vollständigkeitsrelation". Ihre unendlichdimensionale Verallgemeinerung spielt in der Theorie der Hilberträume, die in der Quantenphysik zur Anwendung kommt, eine wichtige Rolle.

9. Und nun zum Abschluss eine Aufgabe, die in einem unendlichdimensionalen Vektorraum[1] spielt: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2.$$

(i) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe! Gehen Sie dabei so vor wie im Buch auf S. 743 f beschrieben! Um Konvergenzfragen müssen Sie sich nicht kümmern. Die Reihe, die Sie erhalten, konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $f(t)$. Sie können dabei die folgenden unbestimmten Integrale benutzen:

$$\int t^2 \sin(k\,t)\, dt = \frac{2\,t\,\sin(k\,t)}{k^2} - \frac{(k^2t^2 - 2)\,\cos(kt)}{k^3} + C \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$\int t^2 \cos(k\,t)\, dt = \frac{2\,t\,\cos(k\,t)}{k^2} + \frac{(k^2t^2 - 2)\,\sin(kt)}{k^3} + C \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Plotten Sie den Graphen von f und den Graphen der Partialsumme der Fourierreihe bis zum Glied mit $k = 5$.

(iii) Setzen Sie in der Fourierreihe $t = \pi$, um den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu berechnen!

[1] Für den Zweck dieses Aufgabe ist es nicht wichtig, um welchen unendlichdimensionalen Vektorraum es sich genau handelt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, der Fourierreihenentwicklung einen Vektorraum zugrunde zu legen. Wichtig ist hier lediglich, dass f stetig und stückweise differenzierbar ist. Für jede solche Funktion f konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen f. Mehr zu Fourierreihen finden Sie bei Interesse im Kapitel 30 des Buchs.