Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 7

1. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $x \mapsto p(x)\, e^x$, wobei p eine Polynomfunktion vom Grad ≤ 2 ist. Da die Ableitung f' jeder Funktion $f \in V$ wieder in V liegt, ist die Zuordnung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung $V \to V$.

   (i) Berechnen Sie ihren Kern! Benutzen Sie dabei *keine* Matrixdarstellung, sondern arbeiten Sie direkt mit Funktionen!

   (ii) Schließen Sie aus dem Ergebnis von (i) *ohne jegliche weitere Rechnung*, welche Funktionen $f \in V$ die Ableitung einer Funktion $F \in V$ sind!

2. Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ eine Äquivalenzrelation ist! Schreiben Sie $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, wenn es eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ und zeigen Sie, dass für beliebige $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

   1.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$,
   2.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$,
   3.) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \sim \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $P : V \to V$ eine lineare Abbildung, für die $P \circ P = P$ gilt[1].

   (i) Welche Eigenwerte kann eine solche Abbildung besitzen?

   (ii) Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$, wobei U der Kern und W das Bild von P ist!

   (iii) Zeigen Sie, dass P diagonalisierbar ist!

4. Geben Sie ein Beispiel für die in Aufgabe 3 behandelte Situation mit $V = \mathbb{R}^3$ an, das illustriert, wie man sich die abstrakt bewiesenen Sachverhalte vorstellen soll!

5. Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Diagonalmatrix. Mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ werden die (verschiedenen) Diagonalelemente bezeichnet. Zeigen Sie, dass es $n \times n$-Matrizen $\mathbf{P}_j$ (für $j = 1, \ldots, m$) gibt, sodass gilt: Das Bild von $\mathbf{P}_j$ ist der Eigenraum von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ_j und

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \mathbf{P}_j = \mathbf{A}, \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j = \mathbf{E_n}, \quad {\mathbf{P}_j}^2 = \mathbf{P}_j \text{ für alle } j, \quad \mathbf{P}_j\, \mathbf{P}_k = 0 \text{ für } j \neq k.$$

   Tipp: Spalten Sie $\mathbf{A}$ in eine Linearkombination $\lambda_1\, \mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_m\, \mathbf{P}_m$ mit Diagonalmatrizen $\mathbf{P}_j$ auf! Es ist ganz leicht!

[1] Eine lineare Abbildung eines Vektorraums *in sich* mit dieser Eigenschaft (man schreibt dann meist einfach $P^2 = P$) wird *Projektion* genannt. Aber Achtung: Dieses Wort wird manchmal auch für lineare Abbildungen eines Vektorraums in einen *anderen* Vektorraum verwendet, wie beispielsweise im Buch.

6. Sei $\mathbf{A}$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix. Mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ werden die (verschiedenen) Eigenwerte bezeichnet. Zeigen Sie, dass es $n \times n$-Matrizen $\mathbf{P}_j$ (für $j = 1, \ldots, m$) gibt, sodass gilt: Das Bild von $\mathbf{P}_j$ ist der Eigenraum von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ_j und

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \mathbf{P}_j = \mathbf{A}, \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j = \mathbf{E_n}, \quad {\mathbf{P}_j}^2 = \mathbf{P}_j \text{ für alle } j, \quad \mathbf{P}_j \, \mathbf{P}_k = 0 \text{ für } j \neq k.$$

   Die erste dieser Beziehungen wird *Spektraldarstellung* von $\mathbf{A}$ genannt.

   Tipp: Benutzen Sie den Umstand, dass es eine invertierbare $n \times n$-Matrix $\mathbf{S}$ gibt mit $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix ist, und machen Sie das, was Sie in Aufgabe 5 mit $\mathbf{A}$ gemacht haben, nun mit $\mathbf{D}$. Danach „transformieren" Sie wieder zurück.

7. Betrachten Sie dieselbe Situation wie in Aufgabe 6.

   (i) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^2 \, \mathbf{P}_j, \quad \mathbf{A}^3 = \sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^3 \, \mathbf{P}_j, \quad \text{allgemein: } \mathbf{A}^r = \sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^r \, \mathbf{P}_j,$$

   und schreiben Sie eine Formel für $f(\mathbf{A})$ an, die man demnach für Funktionen f, die zumindest für die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ definiert sind, erwarten kann.

   (ii) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ invertierbar und $f(x) = \dfrac{1}{x}$, so ist $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$.

8. Mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ berechnen Sie $e^{\alpha \mathbf{A}}$.

9. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Jordan-Normalform, dass jede komplexe quadratische Matrix $\mathbf{A}$ als Summe

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

   geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{D}$ diagonalisierbar ist, $\mathbf{N}$ nilpotent (d.h. es existiert ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{N}^q = 0$) und $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$ gilt.

   Tipp: Spalten Sie die Jordan-Normalform von $\mathbf{A}$ in eine solche Summe auf (es ist leicht zu erkennen, wie das geht) und „transformieren" Sie wieder zurück.

10. Von den folgenden Matrizen aus $\mathbb{C}^{3\times 3}$ lässt sich *ohne jegliche Rechnung* sofort erkennen, welche diagonalisierbar sind und welche nicht. Begründen Sie jeweils!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$