Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 6

1. Für $0 < \alpha < \pi$ sei die Matrix $\mathbf{S}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Sie beschreibt eine Drehung um den Winkel α. Ist sie diagonalisierbar?

2. Für $0 < \alpha < \pi$ sei die Matrix $\mathbf{S}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben. Ist sie diagonalisierbar?
   Vergleichen Sie mit Aufgabe 1. Was lernen wir daraus?

3. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (i) über $\mathbb{R}$, d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst wird,
   (ii) über $\mathbb{C}$, d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ aufgefasst wird.

4. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix}$.

7. Sei $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix (über $\mathbb{C}$) unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der Aufgaben 3 und 4, ohne eine weitere Rechnung durchzuführen!

8. Die Eigenwerte von 2×2-Matrizen lassen sich mit den (über $\mathbb{C}$ geltenden) Identitäten

   Summe der Eigenwerte = Spur der Matrix
   Produkt der Eigenwerte = Determinante der Matrix

   manchmal durch reine Kopfrechnung ermitteln. Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$, ohne eine Rechnung auf dem Papier zu machen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Auf dem reellen Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 wird die lineare Abbildung: $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2,\ \left(T(p)\right)(x) := x\,p'(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T

   (i) durch direktes Arbeiten mit Polynomfunktionen,

   (ii) mit Hilfe der Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

   Anmerkungen: Um die Wirkung dieser linearen Abbildung prägnanter auszudrücken, können Sie statt T auch $x\,\frac{d}{dx}$ schreiben. Die hier auftretenden Eigenvektoren sind Elemente von $\mathcal{P}_2$, also Funktionen, und werden daher auch *Eigenfunktionen* genannt.

10. Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist λ^2 ein Eigenwert von $\mathbf{A}^2$.

11. Für Matrizen $\mathbf{X}, \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und für ein $c \in \mathbb{C}$ gelte

$$\mathbf{XP} - \mathbf{PX} = c\,\mathbf{E_n}.$$

   Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ ist.

   Tipp: Bilden Sie von beiden Seiten dieser Beziehung die Spur!

   Anmerkung: Dieser unscheinbar anmutende Sachverhalt hat wichtige Konsequenzen für die Physik. Man kann ihn dafür verantwortlich machen, dass die Quantenmechanik mit *unendlichdimensionalen* Vektorräumen arbeiten muss.