Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 4

1. In der Physik besonders wichtig sind die drei komplexen Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (Sie beschreiben die Komponenten des inneren Drehimpulses eines Spin-$1/2$-Teilchens in der nichtrelativistischen Quantentheorie.)

   (i) Zeigen Sie, dass sie die Beziehungen $\boldsymbol{\sigma_1}\boldsymbol{\sigma_2} = i\,\boldsymbol{\sigma_3}$, $\boldsymbol{\sigma_2}\boldsymbol{\sigma_3} = i\,\boldsymbol{\sigma_1}$ und $\boldsymbol{\sigma_3}\boldsymbol{\sigma_1} = i\,\boldsymbol{\sigma_2}$ erfüllen!

   (ii) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{E_2}, \boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\sigma_3}\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist!

2. Für welche $c \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & c & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   genau eine Lösung?

3. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Wir bezeichnen die Spalten einer reellen 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (in dieser Reihenfolge). Beweisen Sie, dass

$$\det A = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

   wobei $\cdot$ das Skalarprodukt und $\times$ das Vektorprodukt bezeichnet. Diese Größe wird auch das *Spatprodukt* der Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ genannt. Was ist seine geometrische Bedeutung?

5. Welche Werte kann die Determinante einer orthogonalen Matrix annehmen?

6. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

   eine orthogonale Matrix ist und berechnen Sie ihre Determinante!

7. Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht? Begründen Sie!

   (i) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   (ii) $\rho : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \quad \rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + i\,y \\ 1 + z \end{pmatrix}$

   (iii) $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$

   (iv) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 + 3\,t \\ 1 - 2\,t \end{pmatrix}$

8. Verifizieren Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   eine Spiegelung an jener Ebene durch den Ursprung, die normal zum Vektor $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt, beschreibt!

9. Die Matrix $\mathbf{P} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gibt Anlass zur linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{P}\mathbf{v}$.

   (i) Untersuchen Sie ihre Wirkung! Beschreiben Sie in Worten, wie $\mathbf{P}\mathbf{v}$ geometrisch aus $\mathbf{v}$ hervorgeht! Machen Sie auch eine Skizze!

   (ii) Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ gilt!

   (iii) Geben Sie einige andere Beispiele von linearen Abbildungen $V \to V$ an, die gleich ihrem Quadrat sind! Was haben sie alle im Hinblick auf wiederholtes Anwenden gemeinsam? Mit welchem Begriff sollte man derartige Abbildungen bezeichnen?

10. Für die mit Hilfe einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\,x_1 - 2\,x_2 \\ -x_1 + 4\,x_2 \end{pmatrix}.$$

    Bestimmen Sie $\mathbf{A}$.

11. Für die mit Hilfe einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definierte lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ gilt:

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto 5\,e_1 + 2\,e_2 \\ e_2 &\mapsto 3\,e_1 - 7\,e_2\,, \end{aligned}$$

    wobei e_1 und e_2 die Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sind. Bestimmen Sie $\mathbf{B}$.