Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 2

1. Die Menge $\mathbb{R}^2$ aller reellen Zahlenpaare mit den Operationen

$$\text{„Addition“:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{„Multiplikation mit } \lambda \in \mathbb{R}\text{“:} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_1 \end{pmatrix}$$

   bildet *keinen* reellen Vektorraum. Gehen Sie die Vektorraum-Axiome (V1) – (V9) durch! Welche sind erfüllt, welche sind verletzt?

2. Aufgabe 15.7 aus dem Buch[1].

3. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie jeweils eine Basis an!

   (i) $U_1 :=$ Menge aller $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für die gilt: $v_1 + 2\, v_2 = 3\, v_3$.

   (ii) $U_2 :=$ Menge aller $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für die gilt:

$$v_1 + 2\, v_2 = 3\, v_3 \quad \text{und} \quad 2\, v_1 + 4\, v_2 - 6 v_3 = 0.$$

   (iii) $U_3 := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

4. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{C}^3$ und geben Sie jeweils eine Basis an!

   (i) $W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, z = x + iy \right\}$.

[1] Zur Erinnerung: Das Buch (T. Arens *et. al*: Mathematik) enthält Hinweise zu den Aufgaben. Im zugehörigen Arbeitsbuch finden Sie die Lösungen und teilweise auch die Lösungswege. Versuchen Sie zuerst, die Aufgaben selbst zu lösen, bevor Sie sich die Lösungen im Arbeitsbuch ansehen! In der Übungsstunde geht es darum, die Lösungen korrekt und mit Verständnis zu präsentieren.

(ii) $W_2 := \left\langle \{y_1, y_2, y_3\} \right\rangle$ mit $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y_3 = y_1 + y_2$.

(iii) $W_3 := \left\langle \{u, v\} \right\rangle$ mit $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann! Welche Dimension hat (i) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über sich selbst, (ii) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$?

6. Zeigen Sie unter Verwendung des im Buch auf Seite 548 angegebenen Kriteriums für lineare Unabhängigkeit, dass die Menge $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig ist! Charakterisieren Sie den Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, den diese Vektoren aufspannen, in einer Form, die auch Ihre zukünftigen SchülerInnen verstehen können!

7. $\mathbb{R}[X]_2$ ist der aus allen reellen Polynomen vom Grad ≤ 2 bestehende Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

   (i) Bestimmen Sie seine Dimension!
   (ii) Zeigen Sie, dass $B := \{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\}$ mit $\mathbf{q_1} := 1 + X$, $\mathbf{q_2} := 1 - X$ und $\mathbf{q_3} := X^2$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$ ist!
   (iii) Stellen Sie das Polynom $\mathbf{p} := 1 - X^2$ als Linearkombination der Basis B dar!

8. Aufgabe 15.9 (a)$-$(e) aus dem Buch.

9. Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ nicht notwendigerweise ein Untervektorraum von V. Geben Sie ein Beispiel!

10. Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so ist auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V.

11. Aufgabe 15.14 aus dem Buch.