Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 1

Die Aufgaben auf diesem ersten Übungsblatt dienen der Einstimmung auf die lineare Algebra und setzen keine Inhalte aus der Vorlesung voraus, sondern nur das Wissen, das Sie bereits mitbringen sollten.

1. In der Zeichenebene werden Vektoren als Pfeile interpretiert und durch „Aneinanderlegen“ addiert. Begründen Sie elementargeometrisch (also ohne Rechnung, lediglich durch elementargeometrische Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung), dass für die Addition von Pfeilen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ das Kommutativgesetz

   $$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

   gilt!

2. Für die Addition von drei Pfeilen in der Zeichenebene gilt das Assoziativgesetz

   $$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}).$$

   Gestalten Sie ein GeoGebra-Arbeitsblatt, das diesen Sachverhalt (ohne Rechnung, nur durch Pfeile-Aneinanderlegen) elementargeometrisch illustriert! (Besonders aussagekräftig ist so eine Visualisierung, wenn man die Pfeile $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ mit der Maus verändern kann.)

3. Nun wollen wir Punkte in der Ebene wie üblich durch Zahlenpaare beschreiben und mit ihnen *rechnen*. Für zwei Punkte A, B ist der Halbierungspunkt durch

   $$H=\frac{1}{2}\,(A+B)$$

   und für drei Punkte A, B, C, die ein Dreieck bilden, ist der Schwerpunkt durch

   $$S=\frac{1}{3}\,(A+B+C)$$

   definiert. Beweisen Sie (durch Rechnung, ganz ohne Zeichnung): Das aus den Halbierungspunkten der Seiten des Dreiecks ΔABC bestehende Dreieck (das sogenannte „Mittendreieck“), besitzt den gleichen Schwerpunkt wie das Dreieck ΔABC.

4. Es seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ vorgegeben. Zeigen Sie: Sind $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ Lösungen des Gleichungssystems

   $$\begin{aligned} a\,x+b\,y &= 0\\ c\,x+d\,y &= 0\,, \end{aligned}$$

   so ist auch die Summe $(x,y)+(x',y'):=(x+x',y+y')$ und jedes Vielfache $\lambda\,(x,y):=(\lambda\,x,\lambda\,y)$ für $\lambda\in\mathbb{R}$ eine Lösung.

5. Was halten Sie von folgendem Einwand gegen Aufgabe 4:

   „Die Aufgabe ist ziemlich sinnlos, denn es handelt sich um ein System aus zwei Gleichungen in zwei Variablen. Daher gibt es sowieso nur eine einzige Lösung. Was soll also das mit der Summe und den Vielfachen?“

6. Wie kann man die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4 \\ 3x + 5y - z &= 1 \end{aligned}$$

   geometrisch interpretieren?

7. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

   (i) Kann man $\mathbf{a}$ als Linearkombination von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

   (ii) Kann man $\mathbf{a}$ als Linearkombination von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$ anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

   (iii) Kann man *jeden* Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie!

8. Sei ε jene Ebene im Raum, auf der die drei Punkte $A = (1, 2, 1)$, $B = (-3, 2, 4)$ und $C = (2, -1, 3)$ liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung von ε an!

9. Geben Sie einen Vektor an, der auf die Ebene ε von Aufgabe 8 normal steht!

10. Harmonische Schwingungen mit Kreisfrequenz ω werden durch die Differentialgleichung

$$s''(t) + \omega^2 \, s(t) = 0$$

    beschrieben. (Das bedeutet: Jede zweimal differenzierbare Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die diese Differentialgleichung erfüllt, ist eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω.) Zeigen Sie, *ohne* die Differentialgleichung zu lösen, dass mit je zwei Lösungen s_1 und s_2 auch die Summe $s_1 + s_2$ und jedes Vielfache $\lambda \, s_1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist!

11. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

    gilt. Zeigen Sie: Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade Funktionen, so ist auch $f + g$ und jedes Vielfache $\lambda \, f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte gerade Funktion.