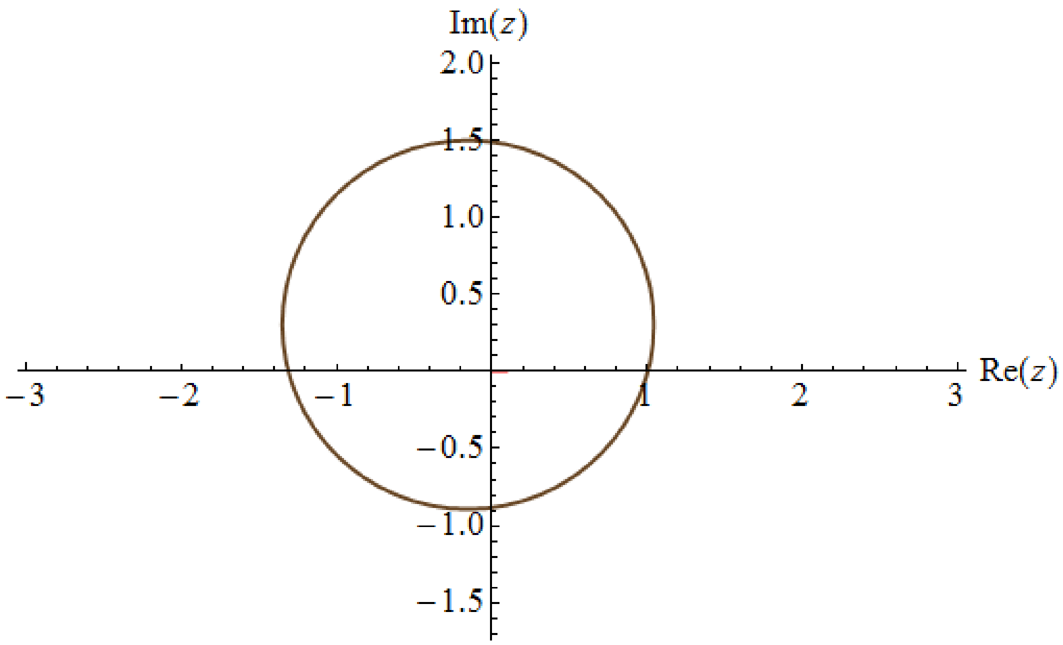
Joukowski-Transformation

Ergänzung zu Analysis für PhysikerInnen III, Kapitel Funktionentheorie
Franz Embacher, Universität Wien, WS 2019/20

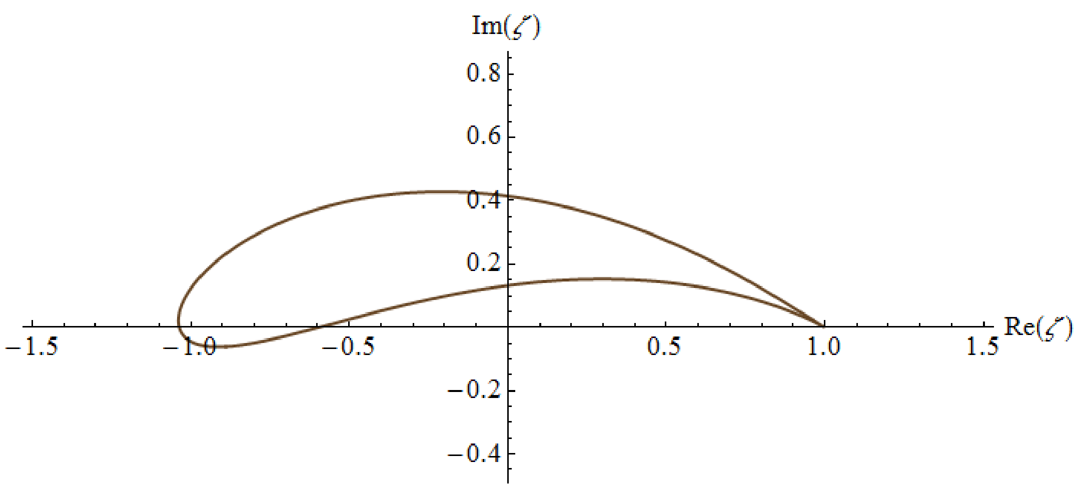
Durch die **konforme Transformation**

$$z \longmapsto \zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

wird die **Kreislinie** $|z-\mu| = R$ in ein **Tragflügelprofil** übergeführt. Dabei muss 1 auf der Kreislinie und -1 im Inneren des Kreises liegen. Für $\mu = -0.156 + 0.31\,i$ sieht das so aus: Die Kreislinie



geht in



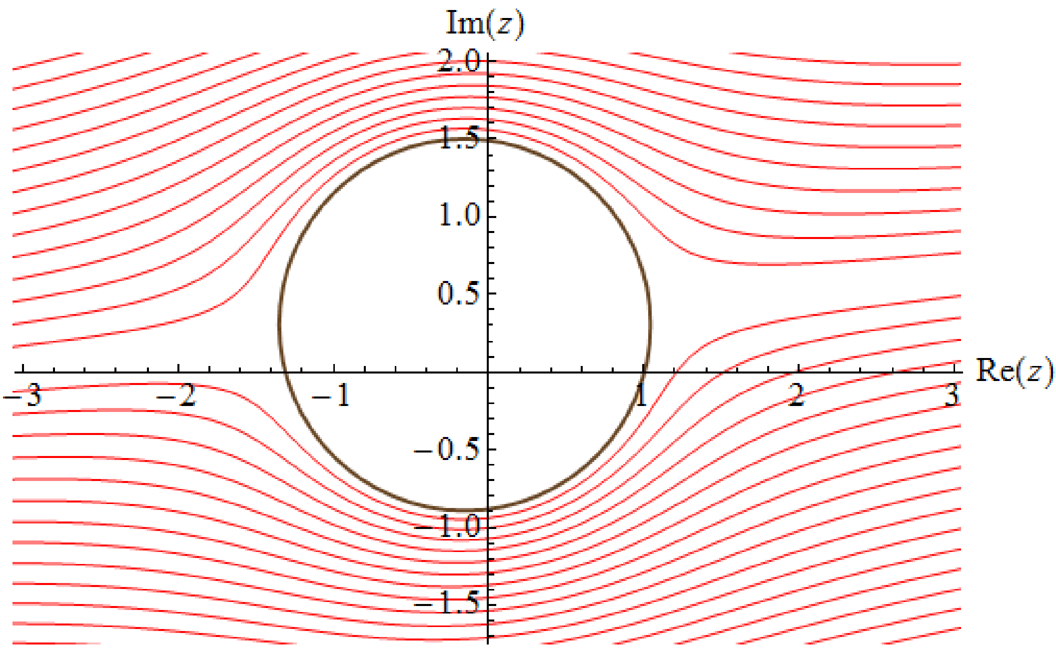
über. Die Punkte ± 1 sind (die einzigen) Fixpunkte der Transformation.

Damit kann die **Strömung** einer reibungsfreien inkompressiblen Flüssigkeit um den Kreis (physikalisch als Strömung um einen Zylinder gedeutet) in eine Strömung um das Tagflügenprofil tranformiert werden. Hier ein **Beispiel**:

Die durch die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-i\alpha}(z-\mu)}{R} + \frac{R}{e^{-i\alpha}(z-\mu)}\right)$$

definierte Strömung beschreibt in der Variable z (man spricht salopp von der “z-Ebene”) einen Fluss um den Kreis $|z-\mu| \leq R$ mit Steigungswinkel (im Unendlichen) α. Hier ein Plot dieser Strömung mit μ wie oben und $\alpha = 0.1$:

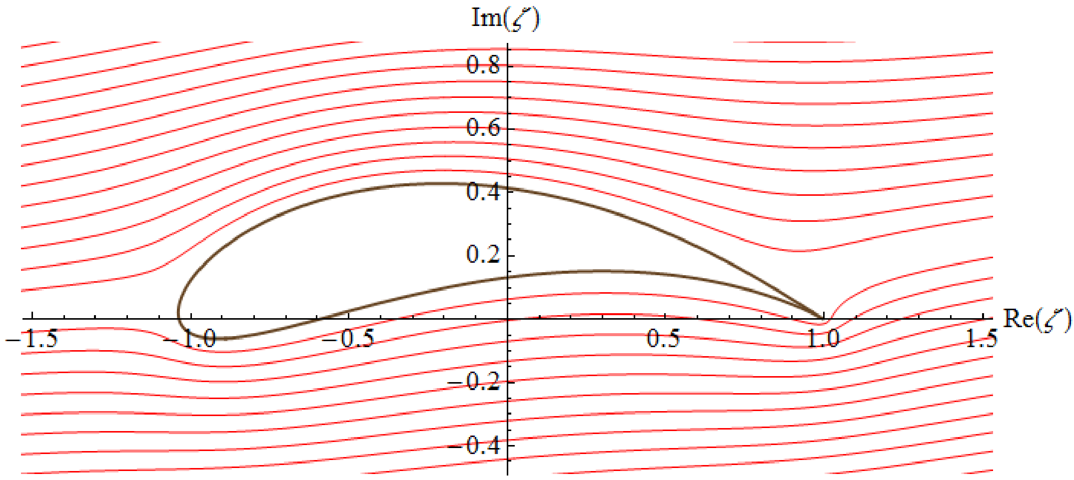


Gemäß der in der Vorlesung besprochenen komplexen Strömungstheorie sind die Stromlinien die Linien

$$\mathrm{Im}(f(z)) = c = \text{const.}$$

Für $c > 0$ liegen sie außerhalb des Kreises (eine Auswahl ist oben geplottet). Die Stromlinie für $c = 0$ fällt mit der Kreislinie zusammen. Die Stromlinien für $c < 0$ verlaufen innerhalb des Kreises und sind hier nicht gezeigt.

Werden diese Stromlinien in die “ζ-Ebene” transformiert, so sieht die resultierende Strömung so aus:



Dass die (doch recht einfache) konforme Abbildung $z \longmapsto \zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ einen Kreis in ein Tragflügelprofil überführt, wurde 1910 von Nikolai Joukowski (es existieren auch die Schreibarten Schukowski, Zhukovski u.ä.) entdeckt. Eine Verallgemeinerung, die realistischere Profile beschreibt, ist die Kármán-Trefftz-Transformation.