Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 12

1. Die Wellengleichung in drei räumlichen Dimensionen

$$\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\phi(t,\vec{x}) = 0$$

für eine komplexwertige Funktion $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ besitzt Lösungen der Form

$$\phi(t,\vec{x}) = \exp\Big(i\,(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\,t)\Big)$$

mit $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{k} \neq 0$ und $\omega > 0$. Wie ist ω zu wählen, wenn $\vec{k}$ vorgegeben ist? Welche Bedeutung haben $\vec{k}$ und ω? Wie sehen die Flächen konstanter Phase (d.h. die Flächen, auf denen $\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\,t$ konstant ist), aus und wie verhalten sie sich im Laufe der Zeit?

2. Lösen Sie die Wellengleichung in drei räumlichen Dimensionen für eine komplexwertige Funktion $\phi : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}) \to \mathbb{C}$ durch den Separationsansatz $\phi(t,\vec{x}) = f(t)\,u(r)$, wobei $r = |\vec{x}|$. Dabei soll f weder in der fernen Vergangenheit noch in der fernen Zukunft unbeschränkt anwachsen, und u soll im Unendlichen verschwinden. Für u machen Sie den Ansatz $u(r) = r^{-1}\,v(r)$. Wie interpretieren Sie die Lösungen, die Sie auf diese Weise erhalten, physikalisch?

3. Zeigen Sie, dass für jede im Unendlichen genügend schnell abfallende Lösung der Wärmeleitungsgleichung (= Diffusionsgleichung)

$$\frac{\partial}{\partial t}\,T(t,\vec{x}) = \chi\,\triangle\,T(t,\vec{x})$$

die Größe $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,T(t,\vec{x})$ zeitunabhängig ist! Was könnte das physikalisch bedeuten?

4. Zeigen Sie, dass für jede im Unendlichen genügend schnell abfallende Lösung der Wellengleichung in drei räumlichen Dimensionen für eine komplexwertige Funktion $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ die Größe

$$Q(t) = i\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\left(\overline{\phi}(t,\vec{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\vec{x}) - \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}(t,\vec{x})\,\phi(t,\vec{x})\right)$$

zeitunabhängig ist! Denken Sie nach: Wieso schreibt man ein i vor das Integral?

5. Lösen Sie die Poissongleichung für eine Punktladung/Punktmasse

$$\triangle\, \phi(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}),$$

indem Sie von beiden Seiten die Fouriertranformierte bilden, die Fouriertransformierte von ϕ berechnen und zurücktransformieren!

Anmerkung: Unter allen Lösungen dieser Differentialgleichung gibt es nur eine einzige, die im Unendlichen verschwindet, und die verwendete Methode liefert automatisch diese.

Tipp: Wenn Sie beim Rücktransformieren auf ein Integral vom Typ $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi\, e^{i\,\vec{\xi}\cdot\vec{x}}\, f(|\vec{\xi}|)$ stoßen, so argumentieren Sie, dass es nur von $|\vec{x}|$ abhängt, sodass Sie zur Berechnung annehmen können, dass $\vec{x}$ in die positive x_3-Richtung zeigt! Nun verwenden Sie Kugelkoordinaten in $\vec{\xi}$.

6. Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 5, um zuerst auch die Poissongleichung

$$\triangle\, \phi(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

für ein gegebenes $\vec{y}$ zu lösen (das liefert Ihnen die zugehörige Greenfunktion) und danach die Poissongleichung

$$\triangle\, \phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

für eine gegebene Ladungsdichte/Massendichte ρ.

7. Die Kinetik eines Ensembles von vielen Teilchen, deren Stöße und Wechselwirkungen vernachlässigt werden, und das sich in einem Gravitationsfeld mit konstantem Beschleunigungvektor $\vec{g}$ befindet, lässt sich durch die Verteilungsdichte f der Geschwindigkeiten und Positionen der Teilchen beschreiben. Sie genügt der (Boltzmann-)Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}} + \vec{g}\cdot\nabla_{\vec{v}}\right) f(t,\vec{x},\vec{v}) = 0.$$

   (i) Zeigen Sie, dass $f(t,\vec{x},\vec{v}) = g\Big(\vec{x} - \vec{v}\,t + \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2\Big)\, h\big(\vec{v} - \vec{g}\,t\,\big)$ mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen g und h eine Lösung ist!

   (ii) Geben Sie eine Lösung an, die die Anfangsbedingung

   $$f(0,\vec{x},\vec{v}) = C\, \exp\big(-\,a\,\vec{x}^{\,2} - b\,(\vec{v}-\vec{v}_0)^2\big)$$

   für vorgegebene positive Konstanten C, a und b und ein vorgegebenes $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ erfüllt! Tipp: Benutzen Sie (i).

8. Zum Abschluss eine nichtlineare partielle Differentialgleichung: In der klassischen Mechanik kann man die Dynamik eines Systems durch die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die reellwertige, von der Zeit und den verallgemeinerten Koordinaten abhängige Wirkungsfunktion S beschreiben. Für den harmonischen Oszillator lautet sie

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}(t,x)\right)^2 + \frac{m\,\omega^2}{2}\,x^2 + \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = 0.$$

Setzen Sie der Einfachheit halber $m = \omega = 1$ und lösen Sie sie mit dem Ansatz $S(t,x) = f(t) + g(x)$. Wenn Sie im Zuge des Lösungswegs ein unbestimmtes Integral benötigen, können Sie es mit einem CAS berechnen, sofern Sie es durch Differenzieren überprüfen.