Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 11

1. Lösen Sie die Wellengleichung in einer räumlichen Dimension
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(t,x) = 0$$
(mit $c > 0$ vorgegeben), indem Sie neue Koordinaten $u = x + ct$ und $v = x - ct$ einführen, in diesen die allgemeine Lösung finden und danach wieder auf die ursprünglichen Koordinaten zurücktransformieren! Interpretieren Sie das Ergebnis!

   Tipp: Nutzen Sie, was Sie in der Analysis II über Koordinatentransformationen gelernt haben!

2. Drücken Sie die in Aufgabe 1 ermittelte allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension durch die Anfangsfunktionen („Anfangsdaten")
$$\phi_0 : x \mapsto \phi(0,x) \quad \text{und} \quad \psi_0 : x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial t}(0,x)$$
aus! (Damit ist das *Anfangswertproblem* dieser Wellengleichung gelöst.)

3. Die Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse $m > 0$ und Kreisfrequenz $\omega > 0$ lautet:
$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) + \frac{m\,\omega^2}{2}x^2\,\psi(t,x).$$
Machen Sie den Ansatz $\psi(t,x) = f(t)\,u(x)$. Zeigen Sie, dass die einzigen Lösungen für f, die weder in der fernen Vergangenheit noch in der fernen Zukunft unbeschränkt anwachsen, die Form $f(t) = C\,\exp\left(-\,i\,\frac{E}{\hbar}\,t\right)$ haben mit einer komplexen Konstanten C (die o.B.d.A. gleich 1 gesetzt werden kann – warum?) und einer reellen Konstanten E. Geben Sie die Differentialgleichung für u an, die noch zu lösen bleibt!

4. Eine schwingende Membran, deren Auslenkungen nicht allzu groß sind, wird durch die Wellengleichung in zwei räumlichen Dimensionen
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(t,x,y) = 0$$
($\phi(t,x,y) =$ Auslenkung am Punkt (x,y) zur Zeit t) beschrieben. Lösen Sie sie für eine quadratische Membran ($0 \le x, y \le L$), die am Rand fest eingespannt ist, durch Trennen der Variablen! Damit finden Sie die „Eigenschwingungen". Um welche Art von Wellen handelt es sich? Welche Frequenzen treten auf und wie hängen sie von L ab?

5. Um die Form der Auslenkung einer kreisförmigen Membran, die eine radialsymmetrische Schwingung ausführt, in der Nähe ihres Mittelpunkts zu studieren, muss man eine radialsymmetrische Lösung der Differentialgleichung von Aufgabe 4 (aber ohne die dortigen Randbedingungen zu berücksichtigen) finden. Dazu verwenden Sie Polarkoordinaten und machen den Separationsansatz $\phi(t,x,y) = f(t)\,u(\rho)$, wobei $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ist. Sobald Sie nach f (was weder in der fernen Vergangenheit noch in der fernen Zukunft unbeschränkt anwachsen soll) gelöst haben, verbleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung, der u genügen soll. Um diese zu lösen, machen Sie einen Potenzreihenansatz

$$u(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\rho^n$$

und gewinnen daraus ein rekursives Bildungsgesetz für die Folge (a_n) der Koeffizienten. Man kann dann o.B.d.A. $a_0 = 1$ setzen. Wieso ist es notwendig, $a_1 = 0$ zu setzen? Mit diesen beiden Werten ermitteln Sie $u(\rho)$ bis zur sechsten Ordnung in ρ. In der auf diese Weise erhaltenen Lösung tritt noch eine frei wählbare Konstante auf. Welche Bedeutung hat sie? Welche Form hat nun die Membran in der Nähe ihres Mittelpunkts näherungsweise bis zur zweiten Ordnung in ρ?

Anmerkung: Die Lösung für u, die Sie in dieser Aufgabe ermittelt haben, ist (von einer multiplikativen Konstante im Argument abgesehen) die sogenannte Besselfunktion J_0.

6. Lösen Sie die Wellengleichung in drei räumlichen Dimensionen für eine komplexwertige Funktion $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\phi(t,\vec{x}) = 0$$

($\triangle$ der dreidimensionale Laplaceoperator) mit der folgenden Methode:

   (i) Bilden Sie die Fouriertransformation der linken Seite in allen vier Variablen! Bezeichnen Sie die Variablen der Fouriertransformierten mit $(\xi_0,\vec{\xi})$ und zeigen Sie, dass die resultierende Beziehung in der Form

   $$\left({\xi_0}^2 - c^2\,\vec{\xi}^{\,2}\right)\,\widehat{\phi}(\xi_0,\vec{\xi}) = 0$$

   geschrieben werden kann!

   (ii) Jede Distribution der Form

   $$\widehat{\phi}(\xi_0,\vec{\xi}) = f(\xi_0,\vec{\xi})\;\delta\Big({\xi_0}^2 - c^2\,\vec{\xi}^{\,2}\Big)$$

   ist Lösung der in (i) erhaltenen Beziehung. Geben Sie eine kurze Begründung!

   (iii) Nun muss rücktransformiert werden, um einen Lösungsausdruck für ϕ zu erhalten. Führen Sie die Integration über ξ_0 aus! Es treten dabei die Größen $f(\pm c\,|\vec{\xi}|,\vec{\xi})/|\vec{\xi}|$ auf. Bezeichnen Sie sie (gemeinsam mit numerischen Vorfaktoren, die ebenfalls auftreten) mit $a(\vec{\xi})$ und $b(\vec{\xi})$. Der gesuchte Lösungsausdruck ist ein Integral, das die (frei wählbaren) Funktionen a und b enthält.

Anmerkung: Für hinreichend friedliche Funktionen a und b erhält man auf diese Weise Lösungen, die „Wellenpakete“ darstellen.