Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

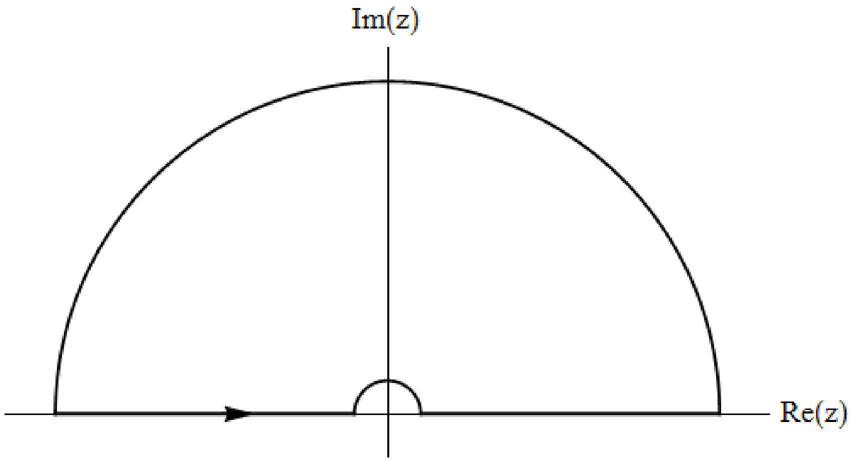
Übungstermin 10

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

   (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx = 0$

   (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8}$

   Tipp: Berechnen Sie zuerst (i) und nutzen Sie das Ergebnis für (ii). In beiden Fällen legen Sie eine komplexe Logarithmusfunktion zugrunde, die für $z = r\,e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \le \varphi \le \pi$ den Wert $\ln(r) + i\,\varphi$ hat. ($\ln(x)$ in den obigen Integralen bezieht sich aber natürlich auf den reellen Logarithmus!) Integrieren Sie zunächst über diese Kurve:



2. Eine Strömung wird durch die holomorphe Funktion $f(z) = z + e^z$ beschrieben. Geben Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektorfeldes als Funktionen von $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$ an und verifizieren Sie explizit seine Quellen- und Wirbelfreiheit!

3. Gegeben sei die auf der oberen Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ definierte holomorphe Funktion $f(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$.

   (i) Zeigen Sie, dass f die obere Halbebene H bijektiv auf die offene Einheitskreisscheibe abbildet!

   (ii) Nun wird f zu einer Funktion $\widetilde{f}$ fortgesetzt, zu deren Definitionsbereich auch die reelle Achse gehört. Wohin werden die reellen Zahlen durch $\widetilde{f}$ abgebildet? Bestimmen Sie die Bildmenge von $\widetilde{f}$.

(iii) Illustrieren Sie anhand einer Skizze, wie die obere Halbebene durch $\widetilde{f}$ in die Einheitskreisscheibe „deformiert“ wird! Vergleichen Sie einander entsprechende Punkte und Linien!

4. Nun lösen Sie ein Dirichlet-Problem: Auf der oberen Halbebene ist $h(x, y) = y + 1$ eine harmonische Funktion, die am Rand (d.h. auf der reellen Achse) den konstanten Wert 1 annimmt. Übertragen Sie h auf die Bildmenge B der Funktion $\widetilde{f}$ von Aufgabe 3, d.h. geben Sie die von h auf B induzierte stetige Funktion k an, die auf dem offenen Einheitskreis harmonisch ist und an seinem Rand den konstanten Wert 1 annimmt!

5. Sei $G = \left\{ r\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \,|\, r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3} \right\}$ und $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   (i) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \overline{G} \to \overline{H}$ an, die auf G holomorph ist!

   (ii) Untersuchen Sie, auf welche Weise durch f die Menge $\overline{G}$ in die Menge $\overline{H}$ „deformiert“ wird! Vergleichen Sie einander entsprechende Punkte und Linien!

6. Nun lösen Sie ein weiteres Dirichlet-Problem: Sei G wie in Aufgabe 5. Geben Sie eine stetige Funktion $h : \overline{G} \to \mathbb{R}$ an, die in G harmonisch (und nicht identisch null) ist und auf ∂G verschwindet! Erstellen Sie einen Plot (z.B. mit *Mathematica*), der die Niveaulinien von h zeigt!

   Tipp: Die Niveaulinien einer Funktion h können Sie beispielsweise mit dem Befehl

   ```
   ContourPlot[h[x,y],{x,-3,3},{y,-3,3}]
   ```

   in *Mathematica* visualisieren, der Plot-Bereich (hier $[-3, 3] \times [-3, 3]$) kann angepasst werden.

7. Aus dem Residuensatz kann folgende Methode, den Wert einer Reihe zu berechnen, hergeleitet werden: Sei f eine überall außer an endlich vielen Polstellen $z_1, \ldots, z_m$ (alle $\notin \mathbb{Z}$) holomorphe Funktion, deren Betrag im Unendlichen zumindest wie $\sim |z|^{-k}$ für ein $k > 1$ verschwindet. Dann ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{z_j}\, g\,,$$

   wobei $g(z) = -\pi \cot(\pi\, z)\, f(z)$. Berechnen Sie mit dieser Methode

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

   für $a > 0$.

8. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Potenzreihen der beteiligten Funktionen, dass der in Aufgabe 7 berechnete Reihenwert für $a \to 0$ gegen $\dfrac{\pi^2}{6}$ konvergiert!

   Tipp: $(1 + a_1\, z + \ldots)^{-1} = 1 - a_1\, z + \ldots$

9. Die Cauchysche Integralformel hat eine interessante Verallgemeinerung für Matrizen (und daher auch für lineare Abbildungen). Sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Ist f eine Funktion, die zumindest für die Eigenwerte definiert ist, so ist $f(A)$ wohldefiniert.

   Zeigen Sie: Ist f eine Funktion, die auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, in dem alle Eigenwerte liegen, holomorph ist, und ist γ eine geschlossene Kurve in G, die jeden Eigenwert einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft, so gilt[1]

$$f(A) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma f(\zeta)\ (\zeta - A)^{-1}\, d\zeta.$$

   Also salopp ausgedrückt: Man kann in der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

   anstelle von z eine hermitesche Matrix einsetzen.

   Anmerkung: $(\zeta - A)^{-1}$ existiert für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$, das kein Eigenwert von A ist. Die Menge aller $\zeta \in \mathbb{C}$, die kein Eigenwert von A sind, heißt *Resolventenmenge* von A, die Abbildung $\zeta \mapsto (\zeta - A)^{-1}$ heißt *Resolventenabbildung* oder kurz *Resolvente*. Die unendlichdimensionale Verallgemeinerung dieses Begriffs (die dann ein bisschen komplizierter ist als die hier benutzte endlichdimensionale Version) wird in der mathematischen Physik benötigt, um lineare Operatoren in unendlichdimensionalen Vektorräumen zu analysieren.

   Tipp: Benutzen Sie entweder den Umstand, dass A diagonalisierbar ist, d.h. dass es eine invertierbare Matrix S gibt mit $A = S\,D\,S^{-1}$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ oder verwenden Sie die Spektraldarstellung $A = \sum_{j=1}^{m} \mu_j\, P_j$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die *verschiedenen* Eigenwerte von A sind und P_j die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum zum Eigenwert μ_j bezeichnet. Im ersten Fall ist $f(A)$ durch $f(A) = S\,f(D)\,S^{-1}$ definiert mit $f(D) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_m))$, im zweiten durch $f(A) = \sum_{j=1}^{m} f(\mu_j)\,P_j$.

[1] Dabei ist $\zeta - A$ eine Kurzschreibweise für $\zeta\,\mathbf{1} - A$ mit $\mathbf{1} = n \times n$-Einheitsmatrix.