Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 9

1. Sei G das sternförmige Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$, und sei $z \in G$. Bestimmen sie die Menge aller $\omega \in \mathbb{C}$, für die gilt: $e^{\omega} = z$. Setzen Sie dabei $z = r\, e^{i\,\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und $\omega = a + i\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wenn man eine solche Zahl ω kennt – wo liegen dann die anderen in der komplexen Ebene? (Machen Sie eine Skizze!) Wie hängt die Menge aller dieser Zahlen ω mit den Logarithmusfunktionen zusammen, von denen in Satz 14.10.3 die Rede ist? Geben Sie *eine* Formel für *alle* Logarithmusfunktionen an!

2. Ebenso wie der komplexe Logarithmus sind komplexe Potenzen nicht eindeutig. Sei G wie in Aufgabe 1. Sind $z \in G$ und $p \in \mathbb{C}$ gegeben, so wird für jede in G definierte Logarithmusfunktion L festgelegt:

   $$z^p := e^{p\, L(z)}.$$

   Welche komplexe Zahl mit dem Symbol z^p gemeint ist, hängt also von der verwendeten Logarithmusfunktion ab. Wir bezeichnen die Menge aller komplexen Werte, die z^p in diesem Sinn haben kann, mit $P(z, p)$.

   (i) Zeigen Sie, dass die Menge $P(z, p)$ für $p \in \mathbb{Z}$ nur ein einziges Element besitzt! Wie hängt es z zusammen?

   (ii) Zeigen Sie, dass die Menge $P(z, \frac{1}{2})$ genau zwei Elemente besitzt! Wie hängen diese mit z zusammen?

   (iii) Zeigen Sie, dass die Menge $P(z, \frac{1}{3})$ genau drei Elemente besitzt! Wie hängen diese mit z zusammen?

   (iv) Bestimmen Sie $P(i, i)$, also die Menge aller Zahlen, die (je nach der verwendeten Logarithmusfunktion) i^i darstellen können!

3. Für $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ berechnen Sie $\mathrm{Res}_1 f$.

4. Für $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2(z-1)}$ berechnen Sie $\mathrm{Res}_0 g$.

5. Für $h(z) = \exp\left(\dfrac{5}{z-2}\right)$ berechnen Sie $\mathrm{Res}_2 h$.

6. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16}$ mit Hilfe des Residuensatzes!

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2\,x^2 + 1}$ mit Hilfe des Residuensatzes!

8. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

mit Hilfe des Residuensatzes!

9. Sei f eine rationale Funktion (also „Polynom durch Polynom“) in zwei Variablen. Formulieren Sie ein Verfahren, wie man mit Hilfe des Residuensatzes ein Integral der Form

$$\int_0^{2\pi} f\big(\sin(t), \cos(t)\big)\, dt$$

berechnen kann!

Tipp: Fassen Sie das Integral als komplexes Kurvenintegral längs der Kurve $|z| = 1$, parametrisiert durch $\gamma(t) = e^{i\,t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, auf und drücken Sie $\sin(t)$ und $\cos(t)$ durch $\gamma(t)$ aus!

Ein Beispiel eines solchen Integrals wäre Aufgabe 5 vom Übungsblatt 8. Die Anwendung des Residuensatzes läuft ein bisschen automatisierter ab als die damals verwendete Methode, aber in den wesentlichen Punkten sind die Berechnungen gleich.

10. In der Quantenfeldtheorie treten Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\,x\,z}}{z^2 - m^2}\, dz$$

für reelles x und $m > 0$ auf. Ein solches Integral ist wegen der Nullstellen des Nenners, die ja auf der reellen Achse liegen, divergent. Eine Möglichkeit, sich zu behelfen, besteht darin, für $\epsilon > 0$ zum Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\,x\,z}}{z^2 - m^2 + i\,\varepsilon}\, dz$$

überzugehen und nach der Integration ϵ gegen 0 streben zu lassen. Führen Sie diese Berechnung mit Hilfe des Residuensatzes durch!

Tipp: Sie müssen dafür die komplexen Polstellen des Integranden nicht genau berechnen! Es reicht, wenn Sie sich darüber orientieren, in welchen Halbebenen sie jeweils liegen und wohin sie (*nach* Anwendung des Residuensatzes) für $\varepsilon \downarrow 0$ streben.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den singulären Punkten „auszuweichen“, wie im Buch auf S. 445 f beschrieben. Wie muss man den Integrationsweg, der zunächst entlang der reellen Achse läuft, abändern, um das gleiche Ergebnis zu erhalten wie mit der obigen Methode?