Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 8

1. Sei f eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve, die den Ursprung der komplexen Ebene einmal umrundet. Zusätzlich wird jene Kurve $\widetilde{\gamma}$ betrachtet, die aus γ durch eine Streckung/Stauchung bezüglich des Ursprungs um einen Faktor $k > 0$ hervorgeht:

$$\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{\gamma}(t) = k\,\gamma(t).$$

Zeigen Sie, dass

$$\oint_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz = k \oint_{\gamma} f(k\,z)\,dz.$$

2. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve, die den Ursprung der komplexen Ebene einmal im Gegenuhrzeigersinn umrundet. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\,\pi\,i & \text{wenn } n = 1 \\ 0 & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Im Übungstermin 7 haben Sie diese Beziehungen für Kurven der Form $|z| = r$ nachgerechnet, im Lichte des Cauchyschen Integralsatzes gelten sie dann allgemeiner in der obigen Formulierung. Der Fall $n \geq 2$ mag erstaunlich erscheinen, da ja $z \mapsto z^{-n}$ im Ursprung nicht definiert und daher auf keiner Kreisscheibe um 0 holomorph ist. Er lässt sich aber mit Hilfe eines einfachen Skalierungsarguments auch intuitiv gut verstehen: Benutzen Sie die in Aufgabe 1 angegebene Identität, um zu schließen, dass $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = 0$ für $n \geq 2$. Warum funktioniert dieses Argument nicht für $n = 1$?

3. Im Buch wird mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel gezeigt, dass jede holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Um den Zusammenhang zwischen Cauchyscher Integralformel und Potenzreihenentwicklung besser zu verstehen, ist es instruktiv, den Spieß umzudrehen und, ausgehend von einer Potenzreihe, die Cauchysche Integralformel zurückzugewinnen. Sei also $z \in \mathbb{C}$ und f eine in der offenen Kreisscheibe $G = \{\zeta \in \mathbb{C} \,\big|\, |\zeta - z| < r\}$ holomorphe Funktion, die durch eine in G konvergente Potenzreihe um z dargestellt wird. Sei weiters γ eine geschlossene Kurve in G, die z einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Zeigen Sie durch gliedweise Integration des Integranden, dass

$$\frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z).$$

4. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ ist für $z = 0$ nicht definiert, kann aber dort aber stetig fortgesetzt werden. Zeigen Sie das mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von e^z um 0. Argumentieren Sie, dass die stetige Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

5. Berechnen Sie $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos(t)}$ mit folgender Methode[1]:

   (i) I kann in ein komplexes Integral über den Einheitskreis umgewandelt werden. Zeigen Sie, dass
   $$I = -2\,i \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^2+4\,\zeta+1}.$$
   Gehen Sie dabei von der Parametrisierung $\gamma(t) = e^{i\,t}$ aus und verwenden Sie $\cos(t) = \frac{1}{2}\,(e^{i\,t}+e^{-i\,t})$ und $d\zeta = i\,e^{i\,t}dt$.

   (ii) Berechnen Sie die Nullstellen des im Integranden auftretenden Nenners (und bezeichnen Sie sie der Übersicht halber mit z_1 und z_2). Eine liegt innerhalb der Kreisscheibe $|\zeta| < 1$.

   (iii) Wenden Sie die Cauchysche Integralformel an, um zu zeigen, dass $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

6. Berechnen Sie $J := \displaystyle\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,x}}{x^2+1}\,dx$ mit folgender Methode:

   (i) Betrachten Sie zunächst das komplexe Kurvenintegral $K := \displaystyle\oint_\gamma \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta^2+1}\,d\zeta$, wobei die geschlossene Kurve γ den Punkt i einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft, den Punkt $-i$ hingegen nicht. Mit der Cauchyschen Integralformel kann K leicht berechnet werden. Tun Sie es!

   (ii) Nun wählt man die Kurve γ für $R > 0$ so:
   - Die reelle Achse entlang von $-R$ bis R
   - und daran anschließend den Halbkreis um 0 in der oberen Halbebene, parametrisiert durch $\sigma(t) = R\,e^{i\,t}$ für $0 \leq t \leq \pi$. (Machen Sie eine Skizze!)

   (iii) Damit wird $K = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\,x}}{x^2+1}\,dx + \int_\sigma \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta^2+1}\,d\zeta$. Der springende Punkt ist nun, dass das zweite Integral für $R \to \infty$ gegen 0 strebt. Zeigen Sie das durch eine Abschätzung!

   Tipp: $$\left|\int_\sigma \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta^2+1}\,d\zeta\right| \leq \frac{\max_\sigma |e^{i\,\zeta}|}{\min_\sigma |\zeta^2+1|}\,\pi\,R$$

   mit $\max_\sigma |e^{i\,\zeta}| = 1$ und $\min_\sigma |\zeta^2+1| = R^2-1$. (Begründen Sie!)

   (iv) Damit sind wir fertig: $J = K = ?$

7. Zeigen sie, dass die Reihe $g(z) := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{3^n\,(-n)!}$ für alle $z \neq 0$ konvergiert und stellen Sie sie durch eine geschlossene Formel dar!

8. Sei $r > 0$. Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{|z|=r} g(z)\,dz$ für die Funktion g aus Aufgabe 7 durch gliedweise Integration der angegebenen Reihe!

[1] Die in dieser und der folgenden Aufgabe angewandte Integrationsmethode wird später mit Hilfe des Residuensatzes verallgemeinert und systematischer in „Rezeptform“ aufbereitet.