Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 6

1. Vom Übungsblatt 5 kennen Sie bereits die Darstellung $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\,\xi\,x} = \delta(x)$ der Delta-Distribution. Sie lässt sich auch auf andere Weise interpretieren und herleiten. Zeigen Sie, dass im Sinn von Distributionen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} d\xi\, e^{i\,\xi\,x} = \delta(x)$$

oder, in genauerer Notation, $\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \delta$ mit $f_n(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} d\xi\, e^{i\,\xi\,x}$. Sie können dabei verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi$ und für jede Testfunktion φ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\,dx$$

gilt.

2. In Anwendungen tritt oft die Verkettung der Delta-Distribution mit einer C^∞-Funktion auf. Verwenden Sie bei dieser Aufgabe die „physikalische Notation", die die Delta-Distribution so anschreibt, als wäre sie eine Funktion:

   (i) Die Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ besitze eine einzige Nullstelle x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$ und sei in einer Umgebung von x_0 streng monoton. Zeigen Sie, dass

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}\,,$$

   indem Sie im Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))\,\varphi(x)\,dx$ eine geeignete Variablensubstitution durchführen!

   (ii) Verallgemeinern Sie die obige Formel für den Fall, dass f endlich viele Nullstellen x_j besitzt (wobei $f'(x_j) \neq 0$ für alle j und f streng monoton nahe jedem x_j)!

3. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\,x)}{x^2+1}\,\delta(x^2-4)\,dx$.

4. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\delta(x^3-1)\,dx$.

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := (2 + x^4)\,\theta(x-2)$, wobei θ die Heaviside-Funktion ist. (Im Buch wird sie mit h bezeichnet, aber in der Physik ist das Symbol θ geläufiger.) Wie sieht ihr Graph aus? Berechnen Sie $(T_f)'$. In der in der Physik üblichen Schreib- und Sprechweise lautet diese Aufgabe einfach: Berechnen Sie f' (im Sinn von Distributionen).

6. Die homogene lineare Differentialgleichung $s''(t) + 2\,s'(t) + 5\,s(t) = 0$ beschreibt die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer harmonischen Kraft (Federkraft) und der Reibung (wobei der Einfachheit halber die Masse gleich 1, die Federkonstante gleich 5 und der Reibungskoeffizient gleich 2 gesetzt sind). Ihre allgemeine Lösung lautet

$$s(t) = (c_1\,\sin(2\,t) + c_2\,\cos(2\,t))\;e^{-t},$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 beliebig vorgegeben werden können. (Rechnen Sie nach, dass alle diese Funktionen – sie beschreiben gedämpfte Schwingungen – die Differentialgleichung erfüllen!) Nun zur eigentlichen Aufgabe: Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$s''(t) + 2\,s'(t) + 5\,s(t) = \delta(t - t_0)$$

mit der Anfangsbedingung $s(t) = 0$ für $t < t_0$. (Physikalisch bedeutet das, dass sich der Körper zunächst in der Ruhelage befindet und zur Zeit t_0 einen unendlich kurzen, aber unendlich starken Stups bekommt.) Gehen Sie dabei nach folgender Methode vor: In den Bereichen $t < t_0$ und $t > t_0$ erfüllt s die homogene Differentialgleichung und ist daher von der oben angegebenen Form. Bezeichnen Sie die beiden Funktionen mit s_- und s_+ und wählen Sie sie so, dass

1.) die Anfangsbedingung erfüllt ist,
2.) s zum Zeitpunkt t_0 stetig ist und
3.) s' zum Zeitpunkt t_0 eine Sprungstelle besitzt, die dazu führt, dass s'' die Delta-Distribution auf der rechten Seite der inhomogenen Differentialgleichung erzeugt.

Dabei ersetzen Sie geschickterweise t in der oben angegebenen Lösung der homogenen Differentialgleichung durch $t - t_0$. (Warum dürfen Sie das und warum ist es geschickt?) Schreiben Sie die Lösung in geschlossener Form mit Hilfe der Heaviside-Funktion an!

Die Lösung sollte so aussehen: $s(t) = \frac{1}{2}\,\theta(t - t_0)\,\sin(2(t - t_0))e^{-(t-t_0)}$.

7. Ausgerüstet mit der Lösung von Aufgabe 6 möchte man die Differentialgleichung

$$s''(t) + 2\,s'(t) + 5\,s(t) = F(t),$$

in der F nun den zeitlichen Verlauf einer vorgegebenen äußeren Kraft beschreibt, lösen. Geben Sie eine Integraldarstellung der Lösung an! Benutzen Sie dabei, dass die linke Seite der Differentialgleichung linear in s ist und dass man F in der Form

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,F(t_0)\,dt_0 \tag{2.1}$$

darstellen kann. Die endgültige Lösungsformel soll keine Heaviside-Funktion mehr enthalten.