Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 2

1. Wir wissen zwar bereits, dass der Grenzwert in einem normierten Raum eindeutig ist. Um das Konzept der Vollständigkeit zu verstehen, ist es aber wichtig, sich das noch einmal deutlich in Erinnerung zu rufen: Es sei $(V, \| \, \|)$ ein normierter Raum und $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in V. Weiters seien g und h Elemente von V. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Dreiecksungleichung für die Norm, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g \quad \text{oder, anders ausgedrückt:} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_n = h \quad \text{oder, anders ausgedrückt:} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - h\| = 0$$

folgt, dass $g = h$ gilt!

2. Sei $V = C^0(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. In Worten: V ist die Menge aller stetigen quadrat-integrierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mit der 2-Norm $\| \, \|_2$ ausgestattet, ist V ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass V *nicht* vollständig ist, d.h. dass es Cauchy-Folgen in V gibt, die nicht gegen ein Element aus V konvergieren!

   Tipp: Wählen Sie eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetiger quadrat-integrierbarer Funktionen, die bezüglich der 2-Norm gegen eine Funktion aus $L_2(\mathbb{R})$ konvergiert, die aber nicht stetig ist! (Sie können z.B. wählen: $f_n(x)$ ist gleich 0 für $x < -1 - \frac{1}{n}$, steigt im Intervall $[-1 - \frac{1}{n}, -1]$ linear bis zum Wert 1 an, ist im Intervall $[-1, 1]$ konstant gleich 1, fällt im Intervall $[1, 1 + \frac{1}{n}]$ linear bis zum Wert 0 ab und ist für $x > 1 + \frac{1}{n}$ wieder gleich 0. Machen Sie eine Skizze!) Ist dann einmal gezeigt, dass diese Folge bezüglich der 2-Norm gegen eine unstetige Funktion aus $L_2(\mathbb{R})$ konvergiert (wenn Sie es geschickt machen, müssen Sie dafür fast nichts rechnen!), so folgt:
   1.) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge. (Jede konvergente Folge in einem normierten Raum ist eine Cauchy-Folge!)
   2.) Da $L_2(\mathbb{R})$ mit der 2-Norm ein normierter Raum ist, folgt mit Aufgabe 1, dass es keinen *anderen* Grenzwert der Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ geben kann, der Element von V wäre.
   Daher ist V nicht vollständig.

3. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und M eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass $M^{\perp}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist, d.h. dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen aus $M^{\perp}$ ebenfalls in $M^{\perp}$ liegt!

4. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sie heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in *eindeutiger* Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dargestellt werden kann!

5. Ein Untervektorraum von $L_2(\mathbb{R})$ ist $U = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \,|\, f(-x) = f(x)$ für (fast) alle $x \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie $U^\perp$.

6. $W = C^\infty(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, die Menge aller beliebig oft differenzierbaren quadrat-integrierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist ein echter Untervektorraum von $L_2(\mathbb{R})$. („Echt“ bedeutet dabei, dass $W \neq L_2(\mathbb{R})$ ist.) Nun nehmen Sie bitte folgenden Sachverhalt ohne Beweis zur Kenntnis: Gilt für ein $f \in L_2(\mathbb{R})$, dass $\langle f, w\rangle = 0$ für alle $w \in W$, so folgt $f = 0$.

   Ermitteln Sie $W^\perp$. Überrascht? Kann es so etwas auch in einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum geben? Was sagt uns das über die „Größe“ von W in $L_2(\mathbb{R})$?

7. Welche der folgenden Funktionen[1] sind Elemente von $L_2(\mathbb{R})$, welche nicht?

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f_3(x) = \frac{1}{x} \qquad f_5(x) = x\, e^{-x} \qquad f_7(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/4}} \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f_6(x) = e^{-x^2} \qquad f_8(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

   Fertigen Sie auch Plots der Graphen dieser Funktionen an und nehmen Sie diese mit!

8. Der Grundzustand des Elektrons im Wasserstoffatom wird in der nichtrelativistischen Quantenmechanik durch die Funktion $\psi \in L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$

$$\psi(\vec{x}) = C \, \exp\left(-\frac{|\vec{x}|}{a_0}\right)$$

   beschrieben, wobei $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{m_e\, e^2}$ der Bohrsche Radius und C eine Konstante ist. Normieren Sie ψ (d.h. bestimmen Sie C so, dass $\|\psi\|_2 = 1$ ist)!

9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

   (i) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe! Sie können dabei die folgenden unbestimmten Integrale benutzen:

$$\int x^2 \sin(n\,x)\,dx \;=\; \frac{2\,x\,\sin(n\,x)}{n^2} - \frac{(n^2x^2-2)\,\cos(nx)}{n^3} + C \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^2 \cos(n\,x)\,dx \;=\; \frac{2\,x\,\cos(n\,x)}{n^2} + \frac{(n^2x^2-2)\,\sin(nx)}{n^3} + C \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

   (ii) Plotten Sie den Graphen von f und den Graphen der Partialsumme der Fourierreihe bis zum Glied mit $n = 5$.

   (iii) Setzen Sie in der Fourierreihe $x = \pi$, um den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu berechnen!

[1] Genau genommen besteht $L_2(\mathbb{R})$ nicht aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen. Wenn von einer Funktion gesagt wird, dass sie Element von $L_2(\mathbb{R})$ ist, ist damit die Äquivalenzklasse gemeint, der sie angehört. Allgemeine Aussagen über Funktionswerte verstehen sich als „fast überall“ geltend, auch wenn das nicht eigens dazugesagt wird.