Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 11

1. Das Paraboloid $P = \{(x, y, x^2 + y^2) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ wird durch
$$\varphi : \{(s,t) \,|\, s^2 + t^2 \leq 1\} \to P,\ (s,t) \mapsto \big(s, t, s^2 + t^2\big)$$
parametrisiert. Berechnen Sie die Gramsche Matrix G und ihre Determinante g.

2. Berechen Sie den Flächeninhalt des Paraboloids von Aufgabe 1.

3. Wie weit muss man von einer Kugel entfernt sein, um genau ein Viertel ihrer Oberfläche zu sehen?

4. Sei G eine zweidimensionale (möglicherweise berandete) Untermannigfaltigkeit[1] von $\mathbb{R}^3$. An jedem Punkt $x \in G$ sei ein Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{\nu}(x)$ gewählt (der überall auf die gleiche „Seite" weist). Ist $\mathbf{v}$ ein (zumindest auf G definiertes) Vektorfeld, so setzt man $d\mathbf{S} = \boldsymbol{\nu}\, dS$ und bezeichnet $\int_G \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ als den Fluss von $\mathbf{v}$ durch G (bezüglich der durch $\boldsymbol{\nu}$ definierten Orientierung). Der Punkt $\cdot$ ist dabei als Skalarprodukt zu verstehen.
   (a) Wie interpretieren Sie $\int_G \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ physikalisch, wenn $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit darstellt?
   (b) Wie interpretieren Sie $\int_G \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ physikalisch, wenn $\mathbf{j}$ den elektrischen Stromdichtevektor darstellt (wie er etwa in den Maxwell-Gleichungen auftritt)?
   (c) Wie interpretieren Sie $-\frac{d}{dt} \int_G \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ physikalisch, wenn $\mathbf{B}$ ein zeitlich veränderliches Magnetfeld darstellt und entlang der Randkurve ∂G der (zeitlich unveränderten) Fläche G eine Leiterschleife verläuft?
   (d) Berechnen Sie $\int_G \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ für das konstante Vektorfeld $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}_0$ mit $G =$ Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(0,0,0)$, Radius R und in positive z-Richtung weisendem Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{\nu}$.

5. Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ mit $\partial A =$ Oberfläche des Zylinders
$$A = \big\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2,\, 0 \leq z \leq H\big\},$$
nach außen weisendem Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{\nu}$ und $\mathbf{v}(x,y,z) = (x, 0, -z)$. Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch, wenn $\mathbf{v}$ (bis auf eine multiplikative, hier der Einfachheit halber gleich 1 gesetzte Konstante) das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit darstellt?

   Tipp: Dass die Oberfläche von A keine Untermannigfaltigkeit ist und nicht an jedem Punkt einen wohldefinierten Normalvektor besitzt, muss hier nicht stören. Fassen Sie ∂A als Vereinigungsmenge von Boden, Deckel und Mantel auf und berechnen Sie die drei entsprechenden Anteile des Integrals getrennt!

[1] Tatsächlich sind auch etwas allgemeinere Flächen zugelassen, wie die nachfolgende Aufgabe 5 zeigt.

6. Sei B die Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius R. Ihre Oberfläche ∂B sei mit dem nach außen weisenden Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{\nu}$ versehen. Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\partial B} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{S}$ mit $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^3}$.

Die letzten beiden Aufgaben handeln von den Integralsätzen von Gauß und Stokes. Auch wenn diese in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden, nehmen Sie sie einfach so, wie sie hier formuliert sind, zur Kenntnis! Mehr ist zur Bearbeitung der Aufgaben nicht nötig.

7. Seien B und ∂B wie in Aufgabe 6. Überprüfen Sie anhand des Vektorfeldes

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{v}(x,y,z) = (-y, x, 2z)$$

die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, d^3x = \oint_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}\,,$$

indem Sie beide Seiten getrennt berechnen!

8. Im $\mathbb{R}^3$ sei S die in der xy-Ebene liegende Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0,0)$, Radius R und in positive z-Richtung weisendem Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{\nu}$. Die Randkurve ∂S werde in mathematisch positiver Richtung durchlaufen, d.h. beim Blick von „oben" im Gegenuhrzeigersinn. (Das entspricht der „Rechtsschraubenregel": Dreht man die Schraube entsprechend der Orientierung der Randkurve, so bewegt sie sich in Richtung des gewählten Einheitsnormalvektors.) Überprüfen Sie anhand des Vektorfeldes

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{v}(x,y,z) = (-y, x, 2z)$$

die Gültigkeit des Stokesschen Integralsatzes

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}\,,$$

indem Sie beide Seiten getrennt berechnen!