Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 10

1. Berechnen Sie $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ mit folgendem Trick: $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) =$ (weiter in Polarkoordinaten).

2. Sei A eine reelle symmetrische positive $n \times n$-Matrix. (Jede solche Matrix ist diagonalisierbar, und alle ihre Eigenwerte sind positiv.) Beweisen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\big(-\langle x, A \cdot x\rangle\big)\, d^n x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}\,.$$

   Tipp: Benutzen Sie den Umstand, dass es für jede reelle positive Matrix A eine reelle orthogonale Matrix R und eine Diagonalmatrix D mit positiven Eigenwerten gibt, sodass $A = R^T \cdot D \cdot R$. Es gilt dann

$$\langle x, A \cdot x\rangle = \langle x, R^T \cdot D \cdot R \cdot x\rangle = \langle R \cdot x, D \cdot R \cdot x\rangle.$$

   Führen sie die Integration mit den neuen Integrationsvariablen $\xi = R \cdot x$ durch!

3. Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeit eines Moleküls im idealen Gas an. Sie ist gegeben durch

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \rho(v) = N \exp\left(-\frac{m\,\|v\|^2}{2kT}\right),$$

   wobei m die Molekülmasse, T die Temperatur und k die Boltzmannkonstante ist. Der Vorfaktor N ist so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(v)\, d^3 v = 1$ gilt. Bestimmen Sie ihn!

   Tipp: Verwenden Sie entweder das Ergebnis von Aufgabe 1 oder das Ergebnis von Aufgabe 2.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untermannigfaltigkeiten? Begründen Sie (zumindest aufgrund eines intuitiven geometrischen Verständnisses dieser Mengen)!

   (a) $M_1 = \{(x,y,z) \,|\, xyz = 0\}$
   (b) $M_2 = \{(x,y,z) \,|\, xyz = 1\}$
   (c) $M_3 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y - z^2 = 0\}$
   (d) $M_4 = \{(x,y,z) \,|\, |x-y| - z = 0\}$
   (e) $M_5 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

5. Seien $a, b, c > 0$. Geben Sie zwei Karten an, die gemeinsam einen Atlas für das Ellipsiod $M = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ bilden!

   Tipp: Führen Sie Koordinaten ein, in denen M wie eine Sphäre aussieht, benutzen Sie die (in der Vorlesung besprochene) stereographische Projektion, um zwei Karten (genauer: die Umkehrabbildungen zweier Karten) anzugeben, die einen Atlas bilden, und übersetzen Sie zurück in die ursprünglichen Koordinaten! Es genügt, wenn Sie die Umkehrabbildungen der resultierenden Karten angeben.

6. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und sei $p \in M$. Im Folgenden werden die Bezeichnungen von Definition 11.1.11 und Satz 11.1.12 verwendet.

   Sei $\mathbf{v} \in T_pM$. Bezüglich einer Karte φ mit $\varphi(0) = p$ sei $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0)$. Bezüglich einer anderen Karte $\widetilde{\varphi}$ mit $\widetilde{\varphi}(0) = p$ sei $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{v}_i \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \widetilde{t}_i}(0)$. Geben Sie eine allgemeine Formel an, wie man die Vektorkomponenten v_i und $\widetilde{v}_i$ ineinander umrechnen kann! (Man spricht in diesem Zusammenhang vom „Transformationsverhalten" eines Vektors.)

   Tipp: Die lokale Koordinatentransformation $\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : (t_1, \ldots, t_k) \mapsto (\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k)$ wird oft in der Kurzform $\widetilde{t}_i = \widetilde{t}_i(t_1, \ldots, t_k)$ notiert, die Komponenten ihrer Jacobi-Matrix in der Form $\frac{\partial \widetilde{t}_i}{\partial t_j}$. Für die inverse Abbildung $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ schreibt man entsprechend $t_i = t_i(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k)$ und $\frac{\partial t_i}{\partial \widetilde{t}_j}$. Um die Darstellung von $\mathbf{v}$ von einer Karte in eine andere umzurechnen, schreiben Sie $\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0) = \frac{\partial(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)}{\partial t_i}(0)$ und drücken dies mit Hilfe der Kettenregel durch die Komponenten $\frac{\partial \widetilde{t}_i}{\partial t_j}(0)$ und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \widetilde{t}_j}(0)$ aus.

7. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, und sei $p \in M$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ stellt sich bezüglich einer Karte φ als

$$f \circ \varphi : (t_1, \ldots, t_k) \mapsto f(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \in \mathbb{R}$$

   und bezüglich einer anderen Karte $\widetilde{\varphi}$ als

$$f \circ \widetilde{\varphi} : (\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k) \mapsto f(\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_k)) \in \mathbb{R}$$

   dar. In Anwendungen schreibt man manchmal (nicht ganz korrekt) f anstelle von $f \circ \varphi$ und $\widetilde{f}$ anstelle von $f \circ \widetilde{\varphi}$. Die partiellen Ableitungen von $f \circ \varphi$ bzw. $f \circ \widetilde{\varphi}$ werden dann in der Form $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ bzw. $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{t}_i}$ geschrieben.

Nun sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar[1] und $\mathbf{v} \in T_pM$. Dann kann man bezüglich einer Karte φ mit $\varphi(0) = p$ die Richtungsableitung im Punkt p als

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) := \sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial f}{\partial t_i}(0)$$

definieren. Zeigen Sie, dass sie nicht von der Wahl der Karte abhängt!

Tipp: Zeigen Sie, dass für jede andere Karte $\widetilde{\varphi}$ mit $\widetilde{\varphi}(0) = p$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial f}{\partial t_i}(0) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{v}_i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{t}_i}(0),$$

wobei die Umrechnung der v_i auf die $\widetilde{v}_i$ wie in Aufgabe 6 vorgenommen wird.

Anmerkung: Damit ist gezeigt, dass f mittels der linearen Abbildung

$$T_pM \to \mathbb{R},\ \mathbf{v} \mapsto (D_{\mathbf{v}}f)(p)$$

ein Element des Dualraums von T_pM definiert. Der Dualraum von T_pM wird *Kotangentialraum* genannt und mit dem Symbol T_p^*M bezeichnet. Die Elemente von T_p^*M transformieren unter Kartenwechsel *anders* als die Elemente von T_pM und werden auch *Kovektoren* oder *kovariante Vektoren* genannt.

[1] Genauer müsste man sagen: $f \circ \varphi$ sei differenzierbar. Dann ist bezüglich jeder anderen Karte $\widetilde{\varphi}$ auch $f \circ \widetilde{\varphi}$ differenzierbar.