Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 8

1. Visualisieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto -\frac{1}{2}\,x$ durch einen geeigneten Plot!

   Tipp: In *Mathematica* erstellen Sie den Plot eines Vektorfeldes mit den Befehlen `VectorPlot` und `VectorPlot3D`. Auch in *GeoGebra* gibt es eine sehr schöne interaktive Visualisierungsmöglichkeit: Um etwa $\mathbf{u}(x, y) = (x, 2y)$ zu visualisieren, platzieren Sie einen Punkt `A` auf die Zeichenfläche, geben `u = Vektor(A,A+(x(A),2y(A)))` ein und ziehen den Punkt `A` herum!

2. Entscheiden Sie für jedes der folgenden Vektorfelder, ob es ein Potential besitzt! Falls ja, geben Sie eines an! Falls nein, begründen Sie!

   (a) $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (1, 2, 1)$

   (b) $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (4\,x\,y, 2x^2 - 3\,y^2)$

   (c) $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (4\,x\,y, x^2 - 4\,y^2)$

   (d) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\dfrac{x}{\|x\|^3}$

3. Mit dem Vektorfeld $\mathbf{j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ und der Kurve (Achtelkreisbogen)

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \big(R\,\cos(t), R\,\sin(t)\big)$$

   (mit vorgegebenem $R > 0$) berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{j}\,d\mathbf{s}$.

4. Mit dem Vektorfeld $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (4\,x\,y, 2x^2 - 3\,y^2)$ und der Kurve

$$\sigma : [0, T] \to \mathbb{R}^2,\ \sigma(t) = \big(3\,\cos(t), 3\,\sin(t)\big)$$

   (mit vorgegebenem $T > 0$) berechnen Sie, *ohne* eine Integration durchzuführen, das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{G}\,d\mathbf{s}$.

5. Mit dem Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 - z, y^2 + z, x + y\,z^2)$ berechnen Sie $\operatorname{div}\mathbf{v}$ und $\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

6. Beweisen Sie die in Satz 9.6.12 angegebenen Beziehungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \Delta f \end{aligned}$$

   für zweimal stetig partiell differenzierbares f und $\mathbf{v}$.

7. Das Magnetfeld eines (unendlich langen, unendlich dünnen) stromdurchflossenen Drahtes entlang der z-Achse ist gegeben durch

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \backslash z\text{-Achse} \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \frac{\mu_0\, I}{2\pi\,(x^2 + y^2)} \big(-\, y, x, 0 \big),$$

wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante und I die elektrische Stromstärke im Draht ist. Überprüfen Sie die Maxwellgleichung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

8. Eine monochromatische, linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle im Vakuum wird durch zwei auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierte und zusätzlich von der Zeit abhängige Vektorfelder $\mathbf{E}$ (elektrisches Feld) und $\mathbf{B}$ (Magnetfeld) der folgenden Form beschrieben ($x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,t) &= \mathbf{E}_0 \sin\big(\langle \mathbf{k}, x\rangle - \omega t\,\big) \\ \mathbf{B}(x,t) &= \mathbf{B}_0 \sin\big(\langle \mathbf{k}, x\rangle - \omega t\,\big). \end{aligned}$$

Dabei sind $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ und $\omega > 0$ konstant, d.h. unabhängig von x und t. Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \end{aligned}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Welche Bedingungen müssen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{k}$ und ω erfüllen, damit $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ diese Gleichungen erfüllen?

   Tipp: Beginnen Sie damit, die Bestandteile der Maxwellgleichungen einzeln zu berechnen. Verwenden sie dabei Vektorkomponenten ($x = (x_1, x_2, x_3)$, usw.) und schreiben Sie die Ergebnisse in komponentenfreier Form (unter Ausnutzung des Skalarprodukts und des Vektorprodukts) an. Sie erhalten vier Beziehungen für $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{k}$ und ω. Finden Sie heraus, was diese geometrisch bedeuten!

9. Aufgrund mehrerer der bisherigen Aufgaben ist klar, dass (in drei Dimensionen)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad \text{für} \quad \mathbf{v}(x) = -\frac{x}{\|x\|^3} = \operatorname{grad} \frac{1}{\|x\|}$$

gilt. Nun heißt es im Buch, dass die Divergenz eines Vektorfelds dessen Quellstärke ist. Bedeutet das, dass das Vektorfeld $\mathbf{v}$ quellfrei ist? Denken Sie physikalisch!