Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 5

1. In einer Aufgabe des vorigen Übungsblatts haben Sie die Steigung der Tangente bzw. einen Normalvektor an die Ellipse $2x^2 + 8y^2 = 1$ im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ auf zwei verschiedene Arten berechnet. Nun berechnen Sie die Ellipsensteigung auf eine dritte Art: Mit $f(x,y) = 2x^2 + 8y^2 - 1$ verwenden Sie die im Buch im Verlauf des Beweises von Satz 9.3.1 angegebene Formel für $g'(x)$.

2. Verifizieren Sie die im Buch auf S. 252 oben angegebene Jacobi-Matrix der Kugelkoordinatenabbildung $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ und die angegebene Jacobi-Determinante!

3. Im $\mathbb{R}^2$ oder einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ möchte man manchmal von den kartesischen Koordinaten (x, y) auf andere Koordinaten (ξ, η) übergehen. In der Regel ist die Zuordnung $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Kettenregel in der (sehr nützlichen) Kurzform

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad \text{oder, mit } (x_1, x_2) = (x, y) \text{ und } (\xi_1, \xi_2) = (\xi, \eta)\text{:}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

angeschrieben werden kann! Dabei sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ usw. mit der Umkehrabbildung $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ zu bilden. Diese Formeln sind so zu verstehen: Man geht von einer ortsabhängigen skalaren (z.B. physikalischen) Größe aus, die durch die (differenzierbare) Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ beschrieben wird. In den neuen Koordinaten wird dieselbe Größe durch die Funktion $f_{\text{neu}} : (\xi, \eta) \mapsto f\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\big)$ beschrieben. Um die partiellen Ableitungen von f, aber ausgedrückt in den neuen Koordinaten, zu berechnen, kann man die linken Seiten der obigen Operatoren auf $f(x, y)$ (mit x und y als Variablen) anwenden und das Ergebnis im Punkt $\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\big)$ auswerten. Oft ist es aber leichter, die rechten Seiten der obigen Operatoren direkt auf $f_{\text{neu}}(\xi, \eta)$ anzuwenden. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass das Ergebnis das gleiche ist wie zuvor.

4. Schreiben Sie die in Aufgabe 3 angegebene Kurzform der Kettenregel für die ebenen Polarkoordinaten an, also mit (r, φ) für (ξ, η). (Tipp: Um die partiellen Abeitungen $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ usw. zu berechnen, können Sie verwenden, dass die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung einer Funktion gleich der Inversen der Jacobi-Matrix dieser Funktion ist.)

5. Die im Buch vorgeführte Herleitung der Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

des zweidimensionalen Laplace-Operators in ebenen Polarkoordinaten (Satz 9.3.9, wir schreiben hier einfach Δ statt $\tilde{\Delta}$) mag ein bisschen sperrig erscheinen. Verifizieren Sie das Ergebnis unter Verwendung der in Aufgabe 4 angegebenen Kurzform der Kettenregel!

Anmerkung: Auch diese Methode erfordert eine „längere, aber einfache“ Rechnung, wie es im Buch heißt. Lassen Sie sich darauf ein! Wenn Sie später eine Vorlesung über Allgemeine Relativitätsteorie oder Differentialgeometrie hören, werden Sie eine viel einfachere Methode kennenlernen, das gleiche Ergebnis zu erhalten.

6. Die Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ (mit $\Delta =$ Laplace-Operator in zwei oder drei Dimensionen) sind für die Physik besonders wichtig.

   (a) Zeigen Sie, dass der zweidimensionale Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten in der Form

   $$\Delta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

   geschrieben werden kann!

   (b) Finden Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen! (Tipp: Klarerweise ist es bei dieser Aufgabe am geschicktesten, ebene Polarkoordinaten zu verwenden.)

7. Finden Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Laplace-Gleichung in drei Dimensionen! (Tipp: Klarerweise ist es bei dieser Aufgabe am geschicktesten, Kugelkoordinaten zu verwenden.)

8. Berechnen Sie $\Delta\,\dfrac{e^{-\kappa\,r}}{r}$ (mit $\Delta =$ dreidimensionaler Laplace-Operator, $r = \|x\|$ und $\kappa > 0$ eine vorgegebene Konstante).

   Anmerkung: Die Funktion $x \mapsto \Delta\,\dfrac{e^{-\kappa\,r}}{r}$ heißt *Yukawa-Potential* und spielt für massive Elementarteilchen (mit $\kappa = \frac{m\,c}{\hbar}$, $m =$ Masse, $c =$ Lichtgeschwindigkeit, $\hbar =$ Plancksche Konstante) eine analoge Rolle wie das *Coulomb-Potential* $x \mapsto \dfrac{1}{r}$ für das (masselose) Photon.

9. Für $u(t,r) = \dfrac{\sin(r-t)}{r}$ zeigen Sie, dass

   $$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(t,r) = 0$$

   (mit $\Delta =$ dreidimensionaler Laplace-Operator und $r = \|x\|$) gilt. Wie würden Sie u physikalisch interpretieren?