Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 4

1. Verifizieren sie den Zusammenhang zwischen dem Gradienten einer differenzierbaren Funktion und deren Niveaumengen (Buch, S. 242 – 243) anhand der Beispiele

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 2\,x - 3\,y + 5$

   (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(X) = \langle n, X\rangle$ für ein vorgegebenes $n \in \mathbb{R}^3$ mit $n \neq 0$

   (c) $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \chi(x, y) = x^2 + y^2$

2. Gegeben sei die durch die Gleichung $2x^2 + 8y^2 = 1$ beschriebene Ellipse.

   (a) Berechnen Sie die Steigung der Tangente an die Ellipse im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ durch Auflösen der Ellipsengleichung nach y und Differenzieren!

   (b) Ermitteln Sie einen Normalvektor auf die Ellipse im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ mit Hilfe des Gradienten der Funktion $f(x, y) = 2x^2 + 8y^2$.

   (c) Überprüfen Sie zur Probe, dass der unter (b) berechnete Vektor auf die Tangente normal steht!

3. Sei g eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte differenzierbare Funktion. Will man

$$\frac{\partial}{\partial x}\, g\,(y\,\sin(x), x\,\sin(y))$$

   durch die partiellen Ableitungen von g ausdrücken, so stellt sich die Frage, wie diese partiellen Ableitungen angeschrieben werden sollen. Zwei Möglichkeiten sind:

   (a) Es werden eigene Namen für die Variablen von g vereinbart.

   (b) Es wird vereinbart, die partielle Ableitung einer Funktion f nach der j-ten Variable mit $f_{,j}$ oder $\partial_j f$ zu bezeichnen.

   Führen Sie die Rechnung einmal gemäß der ersten und einmal gemäß der zweiten Konvention durch!

4. In der Physik will man oft Koordinatentransformationen durchführen. Man verwendet beispielsweise zunächst Koordinaten (x_1, x_2), um den Ort eines (in einer Ebene gefangenen) Teilchens anzugeben. Weiters bezeichne die (differenzierbare) Funktion $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die potentielle Energie des Teilchens, ausgedrückt durch diese Koordinaten. Das bedeutet: Die potentielle Energie des Teilchens, wenn es sich gerade am Ort x befindet, ist $U(x)$. Nun will man von den Koordinaten (x_1, x_2) zu neuen Koordinaten (ξ_1, ξ_2) übergehen, um den Teilchenort zu beschreiben. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Koordinatensystemen wird meist in der Kurzschreibweise $\xi \mapsto x = x(\xi)$

angeschrieben, womit gemeint ist, dass die alten Koordinaten als (differenzierbare) Funktionen $x_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (für $j = 1,2$) aufgefasst werden. Damit werden also die alten Koordinaten durch die neuen Koordinaten ausgedrückt. Auf diese Weise ergibt sich die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1(\xi_1,\xi_2) \\ x_2(\xi_1,\xi_2) \end{pmatrix}.$$

Im neuen Koordinatensystem ist die potentielle Energie des Teilchens gegeben durch die Funktion $U_{\text{neu}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $U_{\text{neu}}(\xi) = U(x(\xi))$.

(a) Geben Sie eine Formel an, die die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial U_{\text{neu}}}{\partial \xi_j}(\xi)$ (für $j = 1,2$) unter Verwendung der Koordinatentransformation durch die partiellen Ableitungen von U ausdrückt! Schreiben Sie Summen nicht explizit an, sondern benutzen Sie das Summensymbol!

(b) Geben Sie eine Formel in Matrixschreibweise an, die den Gradienten von U_{neu} unter Verwendung der Koordinatentransformation durch den Gradienten von U und die (Jacobi-)Matrix $J_x(\xi)$ mit Komponenten $\big(J_x(\xi)\big)_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(\xi)$ ausdrückt! Beachten Sie, dass ein Gradient in der Matrixschreibweise der Kettenregel als Jacobi-Matrix aufgefasst, also als Zeilenvektor angeschrieben wird!

5. Eine Drehung des Koordinatensystems in der Ebene um den Winkel α wird (im Sinn der Erklärung zu Aufgabe 4) formal beschrieben durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \xi \mapsto x(\xi) := R \cdot \xi$$

mit der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie die in Aufgabe 4 (b) gefundene Formel mit der Funktion

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ U(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2\,,$$

indem Sie die linke und die rechte Seite Ihrer Formel getrennt ausrechnen und dann die Ergebnisse vergleichen!

Tipp: Man kann $U(x)$ auch in der Form $\|x\|^2$ oder $\langle x, x\rangle$ oder in Matrixschreibweise als $x^T \cdot x$ lesen. Je nachdem, wie Sie die Rechnung anlegen, kann es sinnvoll sein, die Beziehung $R^T \cdot R = \mathbf{1}$ (mit $\mathbf{1} = 2 \times 2$-Einheitsmatrix), die ausdrückt, dass R eine orthogonale Matrix ist, zu zeigen und zu verwenden.

6. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x_1}{\|x\|}$ im Punkt x in Richtung $v(x)$, wobei $v(x)$ jener Einheitsvektor ist, der von x aus zum Ursprung zeigt! Wie interpretieren Sie ihr Resultat?

7. Unter Verwendung der Beziehung $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(a\,t)\,dt = \frac{\sin(2\pi a)}{a}$ für $a \neq 0$ berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\,\sin(a\,t)\,dt$ für $a \neq 0$ ohne eine neuerliche Integration!