Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 3

1. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,y^2 - x$$

im Punkt $p = (1, 2, f(1, 2))$. Überprüfen Sie, ob die Punkte $A = (3, 1, 7)$ und $B = (2, -3, 12)$ auf dieser Tangentialebene liegen!

2. In einer Aufgabe des vorigen Übungstermins haben Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \frac{1}{\|x\|}$$

berechnet. Schreiben Sie den Gradienten von ϕ in „komponentenfreier“ Form an, d.h. ohne Bezug auf seine einzelnen Komponenten und die einzelnen Koordinaten von x.

3. Es sei $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Berechnen Sie den Gradienten der „radialsymmetrischen“ Funktion

$$g : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = F\left(\|x\|\right).$$

Formulieren Sie Ihr Ergebnis in „komponentenfreier“ Form und überprüfen Sie es anhand der Funktion ϕ von Aufgabe 2!

4. Auf einer ebenen Platte, die mit einem Koordinatensystem versehen ist, herrscht am Punkt (x, y) die Temperatur $T(x, y)$. Die Funktion T ist differenzierbar. Ihr Wert und ihr Gradient am Punkt $p = (1, 4)$ sind bekannt:

$$T(p) = 320$$
$$(\operatorname{grad} T)\,(p) = (\tfrac{3}{2}, -1).$$

Um zum Punkt q zu gelangen, geht man von p aus in Richtung des Vektors $v = (-3, 4)$ eine Strecke der Länge $\frac{1}{2}$. Ermitten Sie $T(q)$ näherungsweise, so gut es mit den angegebenen Informationen geht!

5. Für die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R},\ \psi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

berechnen Sie $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$.

6. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y) = (x^2 + y^2, 2\,x\,y).$$

Berechnen Sie auch die Determinante der Jacobi-Matrix (die sogenannte Jacobi-Determinante)!

7. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ (r, \varphi) \mapsto (r\ \cos\varphi, r\ \sin\varphi).$$

Berechnen Sie auch die Jacobi-Determinante! Sie wird beim Integrieren eine wichtige Rolle spielen.

8. Denken Sie zurück an die Vorlesung über Lineare Algebra: Es sei M eine reelle 2×2-Matrix und f die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = M \cdot x$$

(wobei im letzten Ausdruck $f(x)$ und x als Spaltenvektor aufgefasst werden und der Punkt die Matrizenmultiplikation bezeichnet). Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

9. Geben Sie eine nichtlineare (zumindest quadratische) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, deren Jacobi-Matrix am Punkt $p = (2, 3)$ durch

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist!

Tipp: In Satz 9.2.11 ersetzen Sie $x + \xi$ durch x und x durch p. Wählen Sie ψ geeignet!