Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 2

1. Ist f eine Funktion, die von einer Teilmenge D des $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ abbildet, also $f : D \to \mathbb{R}$, so ist ihr Graph definiert als

$$G_f = \big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \,\big|\, (x, y) \in D \big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Da sie Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind, kann man die Graphen solcher Funktionen halbwegs gut in Skizzen darstellen. Sie sind sehr nützlich, um das Verhalten von Funktion in zwei Variablen zu untersuchen und zu verstehen.

Mit den heute zur Verfügung stehenden Computerwerkzeugen ist das Darstellen derartiger Graphen nicht schwer. In *GeoGebra* öffnen Sie einfach die 3D-Ansicht und geben den Funktionsterm (mit den Variablenbezeichnungen `x` und `y`) ein. In *Mathematica* verwenden Sie die Syntax

```
Plot3D[x Sin[y] + y Sin[x],{x,-5,5},{y,-3,3}]
```

um den Graphen der Funktion $(x, y) \mapsto x \sin(y) + y \sin(x)$ über dem Rechteck $[-5, 5] \times [-3, 3]$ anzuzeigen.

Eine weitere Methode zur Untersuchung von Funktionen in zwei Variablen besteht darin, den Wert einer Variable konstant zu halten und die andere zu variieren, also beispielsweise die Funktion (in einer Variable) $x \mapsto f(x, 0)$ zu betrachten. Ihr Graph ist dann die Schnittmenge von G_f mit der Ebene $y = 0$. Wichtig ist es auch oft, zu bedenken, dass $x^2 + y^2$ in der xy-Ebene das Quadrat des Abstands von (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$ ist.

Verwenden Sie diese Methoden (und andere, die Ihnen einfallen), um das Aussehen der Graphen folgender Funktionen zu untersuchen und in Worten zu beschreiben:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3x - 2y + 1$

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = x^2 + y^2$

   (c) $h : D \to \mathbb{R},\ h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Erstellen Sie dazu möglichst aussagekräftige Skizzen oder Plots der Graphen!

2. Dasselbe mit

   (a) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ k(x, y) = x^2 - y^2$

   (b) $\ell : [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R},\ \ell(x, y) = \sin(x) \cos(y)$

   (c) $\beta : [-3, 3] \times [-3, 3] \to \mathbb{R},\ \beta(x, y) = |x - y|$

3. In Aufgabe 1 (b) haben Sie den Graphen der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x^2 + y^2$ untersucht. Wenden Sie sich nun den Niveaumengen von g zu: Für beliebig vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ beschreiben Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = c\,\}$ in Worten und durch eine Gleichung! Zeichnen Sie einige dieser Niveaumengen, sodass man auch ohne Betrachtung des Graphen eine Vorstellung vom „Verhalten“ dieser Funktion bekommt!

4. Dasselbe mit der Funktion k von Aufgabe 2 (a).

5. Plotten Sie den Graphen der Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ w(x,t) = \sin(x - t)$. Erklären Sie seine Form! Wie sehen die Niveaumengen aus? Was könnte w physikalisch darstellen?

6. Betrachten Sie den Graphen der Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y) = x^2 + y^2 + 5$. Wohin *genau* sollten Sie zeigen, wenn gefragt wird, wo diese Funktion ihren kleinsten Wert annimmt? Wohin sollte man genau genommen *nicht* zeigen?

7. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = 3\,x_1 - 2\,x_2 + 1$

   (b) $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto s^2 + 4\,t^3 - s\,t^2$

   (c) $\phi : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \dfrac{1}{\|x\|}$

   Anmerkung: Die Funktion in (c) und ihre partiellen Ableitungen begegnen einem in der Physik sehr oft. Meist schreibt man sie in der Form $\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{|\vec{x}|}$ oder (etwas schlampig) als $\phi = \dfrac{1}{r}$ mit $r = |\vec{x}|$ an. Mit einer geeigneten Konstante multipliziert, stellt sie das Gravitationspotential (bzw. elektrostatische Potential) einer im Ursprung ruhenden Punktmasse (bzw. Punktladung) dar.

8. Betrachten Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(x^2 - 3\,y^2)}{x^2 + y^2} & \text{wenn}(x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{wenn}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (Wenn Sie ihn mit einem Computerwerkzeug erstellen, müssen Sie den Wert an der Stelle $(0,0)$ nicht eigens berücksichtigen, da f stetig ist. Geben Sie einfach den Term der ersten Zeile ein!)

   (a) Ermitteln Sie Termdarstellungen der Funktionen $x \mapsto f(x,0)$ und $y \mapsto f(0,y)$.

   (b) Ist f an der Stelle $(0,0)$ partiell differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie die partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$. Falls nein, begründen Sie!

   (c) Besitzt der Graph von f eine Tangentialebene im Punkt $(0,0,0)$? Entscheiden Sie ohne Berechnung aufgrund eines hinreichend guten Plots des Graphen!

   (d) Ist f an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar? Ein qualitatives Argument auf der Basis der Antwort auf Frage (c) reicht aus.