Universität Wien
Prof. Dr. D. Burde

Lie-Algebren und Darstellunstheorie

— Test-Examen —

Wintersemester 2004/05

---

1. Grundlagen über Lie-Algebren. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ist abelsch.
(b) Für das Radikal $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra gilt $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
(c) Es gilt $D(Z(\mathfrak{g})) \subseteq Z(\mathfrak{g})$ für alle Derivationen D von $\mathfrak{g}$.

(7 Punkte)

2. Die Exponentialfunktion. Man beweise mit Hilfe der Jordanschen Normalform, daß die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

surjektiv ist. Ist sie auch injektiv ?

(7 Punkte)

3. Auflösbare Lie-Algebren. Sei $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})$ die 3-dimensionale Heisenberg Lie-Algebra. Zeige, daß die Lie-Algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}))$ nicht auflösbar ist.

(5 Punkte)

4. Treue Darstellungen nilpotenter Lie-Algebren. Es sei (x, y, z) eine Basis für $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})$ mit $[x, y] = z$. Man zeige, daß durch $\lambda(x) = E_{12}$, $\lambda(y) = E_{23}$ und $\lambda(z) = E_{13}$ eine treue Darstellung

$$\lambda\colon \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$$

definiert wird. Dabei bezeichnet E_{ij} die kanonische Basis von $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$.

(7 Punkte)

5. Die Cartan-Killing-Form. Man zeige, daß für die Cartan-Killing-Form von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ bezüglich der Standardbasis gilt:

$$\kappa(x, y) = 4\,\mathrm{tr}(xy)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

(4 Punkte)

5. Halbeinfache Lie-Algebren. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle halbeinfachen Lie-Algebren der Dimension 8 über $\mathbb{C}$.

(7 Punkte)

Besprechung: Dienstag, 18. Jänner 2005