Was kann Stoffdidaktik heutzutage (noch) leisten?

Stefan Götz

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien

Stefan.Goetz@univie.ac.at

10. März 2014

„Mathematikdidaktik vom Fach aus“ (WITTMANN 2014)

1. **Mathematische Miniatur**: mathematische Praxis als Vorbild bei
   1. der Beschreibung, Erforschung und Begründung von Mustern $\longrightarrow$
      „vereinfachen, ohne zu verfälschen“
   2. **der Entwicklung von Kompetenzstufen**

   $\longrightarrow$ Zusammenarbeit mit Mathematiker(inne)n

2. **Strukturierung** des Unterrichts nach **fachlichen Grundideen**:

Betonung ihrer Schulrelevanz schon in der fachlichen Ausbildung

   $\longrightarrow$ **Schnittstellenproblematik**

3. Identifizierung im Fach „**eingefrorener didaktischer Momente**“:

   z. B. **Vernetzungsmöglichkeiten**

Aufbau des Vortrages

Stoffdidaktik spielt eine aktuelle Rolle beim

- **Vernetzen** verschiedener mathematischer Gebiete:

  Stochastik – Analysis

- Ordnen universitärer mathematischer Inhalte in Hinblick auf ihre Schulrelevanz — **Schnittstellenproblematik** (doppelte Diskontinuität):

  Grundkenntnisse, Grundvorstellungen, Grundeinsichten in der

  Analysis

- Konkretisieren von **Kompetenzstufen** beim Begründen:

  Geometrie

Das Paradoxon des Schenkens (vgl. SZÉKELY 1990, S. 30 ff.)

Eine Gesellschaft bestehe aus n Personen, von denen jede ein Geschenk mitbringt. Diese n Geschenke werden eingesammelt und zufällig wieder verteilt, so dass jede Person genau ein Geschenk bekommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass **niemand sein Geschenk zurückerhält**?

Mit Hilfe der Ein-Ausschaltformel erhält man

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n > 2) \ .$$

Ein Ergebnis aus der **Analysis** lehrt uns

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{1}{e} \ .$$

„Diese faszinierende Verbindung von Stochastik und Analysis [...]“ (KRATZ 2005, S. 15)

Eine Verallgemeinerung ...

Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit p_n^k, dass **genau** k **Personen ihr Geschenk zurückbekommen**.

$\binom{n}{k}$	Möglichkeiten, jene k Personen auszuwählen, die ihr Geschenk zurückerhalten
$n-k$	Personen bekommen ihr Geschenk nicht zurück: **diese Situation kennen wir schon!**

Wir berechnen („günstige durch mögliche“)

$$p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \mp \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right] .$$

Nun zeigt uns die **Analysis**

$$\lim_{n\to\infty} p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1} (:= p_\infty^k) \quad \text{und insbesondere} \quad p_\infty^1 = \frac{1}{e} = p_\infty^0 .$$

. . . und eine (gewagte?) Folgerung

Der **inhaltliche stochastische Kontext** bringt uns auf

$$\sum_{k=0}^{n} p_n^k = 1 \ ,$$

denn entweder bekommt niemand sein Geschenk zurück, oder eine Person, oder zwei, oder . . . , oder alle n Personen.

Da diese Beziehung **für alle** n gilt, sehen wir auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_\infty^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot e^{-1} = 1$$

ein, oder

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad (> 1!) \ .$$

Neuer Verteilungsvorgang

Jedes der n Geschenke wird unter den n Personen fair verlost. Es kann also passieren, dass eine Person mehrere Geschenke erhält, eine andere dafür gar keines. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit q_n, dass **eine bestimmte Person kein Geschenk** bekommt?

Wiederum ergibt der Ansatz „günstige durch mögliche“

$$q_n = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

Bekanntlich ist

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{e} .$$

Bemerkungen

- **Reihen**darstellung von $\frac{1}{e}$ benötigt
  - $(e^x)' = e^x \longrightarrow$

    $$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x < 0)$$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Folgen**darstellung von $\frac{1}{e}$ benötigt
  - $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
  - Wenn $a_n \to a > 0$ und $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$.

    Spezialfall von $a_n \to a$, $b_n \to b$ mit $b_n > 0$ und $b > 0$, dann $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

In der **Analysis-Vorlesung** (Steinbauer 2012, S. 98) wurde aber

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{definiert mit} \quad e := \exp(1) \ .$$

Weitere Verallgemeinerungen kursorisch (Götz 1993)

- Eine bestimmte Person bekommt **genau** k **Geschenke**:

$$q_n^k = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} q_n^k = \frac{e^{-1}}{k!}$$

- n Personen bringen m Geschenke mit: Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person **kein Geschenk** erhält:

$$r_{m,n} = \frac{(n-1)^m}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{m}{n}\to\lambda}} r_{m,n} = e^{-\lambda}$$

- Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person **genau** k **Geschenke** bekommt $\longrightarrow$ Poisson-**Verteilung**:

$$r_{m,n}^k = \frac{\binom{m}{k} \cdot (n-1)^{m-k}}{n^m} \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{m}{n}\to\lambda}} r_{m,n}^k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Vernetzungen im Mathematikunterricht: Literatur

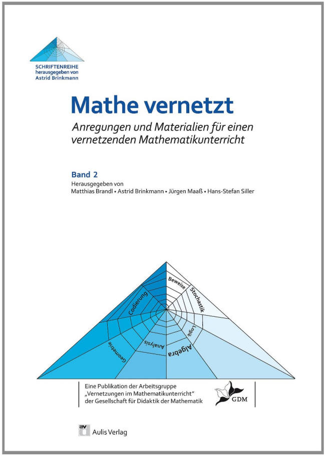


Abbildung: Band 2 der Reihe „Mathe vernetzt" (2012)

Band 1 (2011):

3.1 **Innermathematische** Vernetzungen

3.1.2 Unterkategorien der **anwendungsbezogenen** Vernetzung

„Anbindung von Sätzen [...] an Probleme [...], die mit ihrer Hilfe gelöst werden können" (S. 14)

M. Brandl: „Der Lotto-Jackpot in der (Kurven-)Diskussion — **eine vernetztende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht** der Oberstufe", S. 98 – 107 (Hervorhebung S. G.)

Vernetzungen und vernetztes Denken im Mathematikunterricht (Band 1, S. 7–21)

NCTM 2000, S. 64

„Instructional Programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to –

- recognize and use connections among mathematical ideas;
- understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole

[. . .]“

Kiesswetter 1993, S. 5

„Unverzichtbar sind Vernetzungen der Wissenselemente [. . .] in der Mathematik, wenn man diese primär als produktiven Prozeß versteht, bei dem es ja u. a. um die Lösung von Problemen geht.“

(Brinkmann, Maass, Ossimitz & Siller 2011, S. 8)

$$A_n = (n-1)\cdot(A_{n-1}+A_{n-2})\ , \quad A_1 = 0\ , \quad A_2 = 1$$

rekursive Darstellung der Anzahl der Möglichkeiten, **alle** n **Briefe in ein falsches Kuvert zu stecken**.

$$\longrightarrow \quad p_n = \frac{A_n}{n!}$$

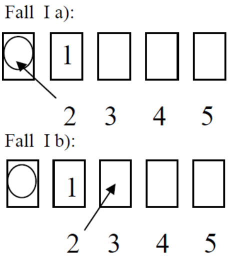


Abbildung: Christines Ansatz

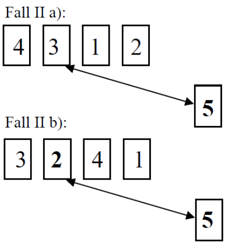


Abbildung: Svens Ansatz

Abbildung: Bayern vs. Arsenal

Abbildung: Schachtjor Donezk vs. BVB

Acht Gruppenerste, acht Gruppenzweite $\longrightarrow$

(1) Jeder Gruppen**zweite** spielt gegen einen Gruppen**ersten**.

(2) **Kein** Gruppenzweiter spielt gegen den Ersten **derselben** Gruppe.

$$(1) \longrightarrow 8! \qquad (1)+(2) \longrightarrow 8! \cdot \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (\textsc{Kiesl}\ 2013)$$

Das Rencontre-Problem von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe 2 (Rasfeld 2001)

1. **Primarstufe**: zwei Sätze von je sieben Kärtchen mit paarweise verschiedenen Namen

   enaktiver Zugang:

   1. wiederholtes zufälliges Legen des zweites Satzes unter den (fixen!) ersten
   2. zählen, wie oft wenigstens eine Übereinstimmung passiert
   3. gar nicht selten!

2. **Sekundarstufe 1**: Simulation mit dem Computer (vgl. Biehler 2003) und die Siebformel $\longrightarrow$ **wenigstens ein Fixpunkt** mit

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_5) &= \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{19}{30}=0,6333\ldots \\ \mathrm{P}(A_{n+1}) &= \mathrm{P}(A_n)+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,, \quad n \geq 1\,, \mathrm{P}(A_1)=1 \end{aligned}$$

Die Verteilung der Anzahl der Fixpunkte S_n

(ENGEL 1973, S. 151 f.)

3. **Sekundarstufe 2**: nochmals für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist

$$\mathrm{P}(S_n = k) = p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \mp \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right]$$

Erwartungswert, Varianz: mühsam zu berechnen!

Modell:

n Karten mit Nummern $1, 2, \ldots, n$ werden zufällig gezogen und auf n numerierte Plätze gelegt.

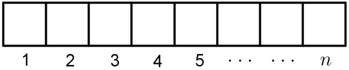


Abbildung: n Plätze für n Karten

Erwartungswert und Varianz der S_n

Die Zufallsvariablen („**Indikatoren**“)

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Stelle } i \text{ Fixpunkt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

zeigen die „Treffer“ an.

Ihr **Erwartungswert** ist

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \cdot \mathrm{P}(X_i = 0) + 1 \cdot \mathrm{P}(X_i = 1) = 1 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \; .$$

Damit ist wegen $\boxed{S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$

$$\boxed{\mathrm{E}(S_n)} = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = \boxed{1}$$

unabhängig von n!

Ebenso ist die **Varianz** der S_n gleich $\boxed{\mathrm{Var}(S_n) = 1}$.

„Aus kleinen Bächen wird ein Fluß“

(SZÉKELY 1990, S. 31)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_i = 1) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

versus

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq 1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63 \ .$$

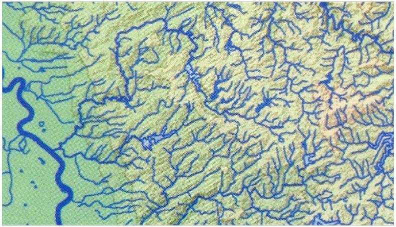


Abbildung: Die Wupper und ihre Zuflüsse

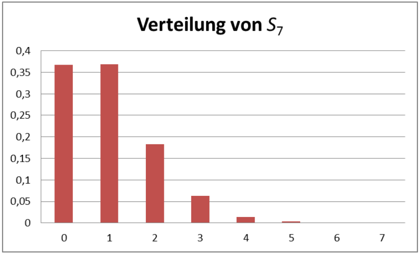


Abbildung: Verteilung von S_7

Das Spiralprinzip als **Spirale**

Grenzwerte von Folgen

In GÖTZ 1993 gibt es **vier Hilfssätze** aus der **Analysis**:

1. $\boxed{\lim_{n\to\infty} {a_n}^{-1} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{-1}}$
2. $\boxed{\lim_{n\to\infty} {a_n}^{-k} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{-k}}$ mit $k \in \mathbb{N}$:
   Grenzwertdefinition und $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$
3. $\boxed{\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{b}}$ mit $b \in \mathbb{R}$
4. $\boxed{\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = a^b}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$:
   Stetigkeit der Logarithmus- und Exponentialfunktion

Diskontinuität Analysis-Ausbildung – selbstständige Anwendung

Transferproblematik $\longrightarrow$ Lehramt-Studierende reihen die **Fachwissenschaft** an **vorletzte Stelle** in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (ETZLSTORFER 2010, S. 105).

Aktuelle Befunde (NIKODIM 2013, Hervorhebungen S. G.)

Erwartung an das Mathematikstudium: Lehramtsstudierende

„Ich erwarte mir vom Mathematikstudium eine gute Vorbereitung um danach mit guten Kompetenzen einen guten Matheunterricht zu halten. **Ich möchte die Herleitungen der Formeln lernen**, die einem in der Schule einfach auf einem Teller serviert werden."

Erfüllung der Erwartung / Studienzufriedenheit: Lehramtsstudierende

„Mir war klar, dass der Umstieg von der Schule auf die Uni schwer ist, aber nach einer kurzen Phase voller Verzweiflung lief das erste Semester richtig toll. [...] Im 2. Semester bin ich dann aber recht schnell komplett ausgestiegen. **Besonders in Analysis konnte ich keine Parallelen zur Schule mehr sehen**. [...]"

Folgen und Reihen: eine gezielte Auswahl

Drei Grundkenntnisse (Götz 2013, S. 365)

1. **Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz**: Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte reelle Folge ist konvergent, analog für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen.

2. Der in der Schulanalysis **wichtigste Grenzwert** ist

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

für $|q| < 1$.

3. Die **geometrische Reihe** ist — unter gehörigen Voraussetzungen — **berechenbar**.

Ziel: Schulrelevanz von fachmathematischen Inhalten aufzeigen

$\longrightarrow$ **Sinnstiftung**!

Ein innermathematisches Beispiel

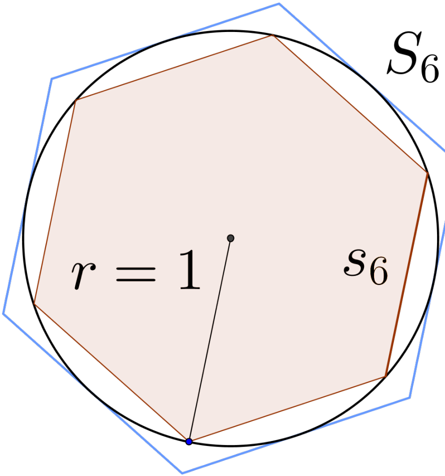


Abbildung: Approximation des Umfanges des Einheitskreises nach ARCHIMEDES

Eine Iteration dazu

vgl. Schuppar 1999, S. 35 und S. 40

Seitenlängen der dem **Einheitskreis**

- **eingeschriebenen** regelmäßigen n-Ecke: $s_n \to$ Umfänge $u_n < 2\pi$
- **umschriebenen** regelmäßigen n-Ecke: $S_n \to$ Umfänge $U_n > 2\pi$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sqrt{2-\sqrt{4-{s_n}^2}} \\ S_n &= \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

Numerisch: Subtraktionskatastrophe (Schuppar 1999, S. 35 f.)

Geometrisch scheint alles in Ordnung

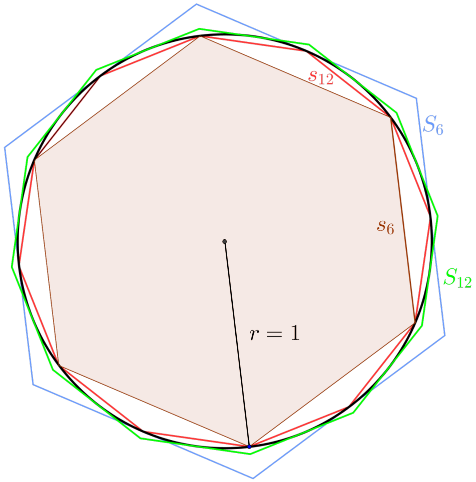


Abbildung: $s_{12} < s_6$ und $S_{12} < S_6$

Ein bisschen Analysis klärt

Grundkenntnis 1

- $s_n > 0$ für alle $n > 2$ und
- $s_{2n} < s_n$ ebenfalls für alle $n > 2$

Daher ist die Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent: $\lim_{n\to\infty} s_n =: s$.

$$\text{Also:} \quad s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}} \quad \text{führt zu} \quad \boxed{s = 0}.$$

Damit:

$$S_n - s_n = s_n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right) \to 0 \qquad \text{und}$$

$$U_n - u_n = n \cdot (S_n - s_n) = \underbrace{n \cdot s_n}_{=u_n < 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right) \to 0 \,.$$

Das genügt

Es gilt nämlich:

Es seien

- $a_n > L > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und
- $0 < b_n < L \ \forall n \in \mathbb{N}$ zwei reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Dann ist

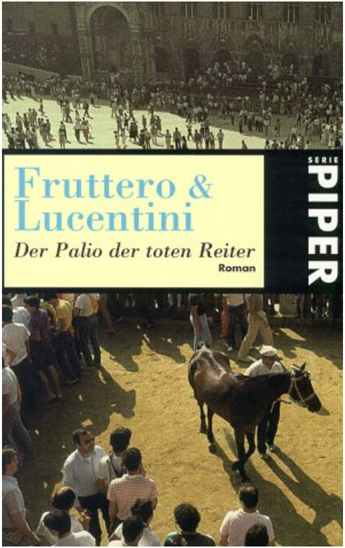
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Begründung

1. $0 < |a_n - L| < |a_n - b_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
2. $|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L| < \underbrace{|b_n - a_n|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|a_n - L|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \to \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Daher ist $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} U_n = 2\pi}$.

Eine literarische Quelle für geometrische Reihen



Der Palio der toten Reiter

(FRUTTERO & LUCENTINI 1995, S. 18 f.)

„*Für ein Konversationshandbuch über den Palio*

Guidobaldo: ‚Siena hat siebzehn Contraden, aber nur zehn davon beteiligen sich am Palio.'
Valeria: ‚Ach wirklich? Und wieso?'
Guidobaldo: ‚Die Rennbahn um den Platz ist eng, unregelmäßig, voller Auf und Ab und gefährlicher Kurven [...]. Was meinen Sie, was passieren würde, wenn da siebzehn Pferde gleichzeitig losgaloppierten? Sie würden nicht mal zwanzig Meter weit kommen, ohne zu stürzen.'
Valeria (sich die Hände vor die Augen schlagend): ‚Die armen Tiere!'
Guidobaldo: ‚Deswegen machen bei jedem Palio nur zehn Contraden mit, und die sieben anderen haben das Recht, im nächsten Jahr mitzumachen, und so weiter.'
Anwalt: ‚Und die übrigen drei, die bis zehn noch fehlen?'
Guidobaldo: ‚Die werden aus den zehn Teilnehmern des letzten Jahres ausgelost.'"

Ein Bild sagt mehr als [. . .]

Abbildung: ©2011 Holiday Apartment Tuscany.

Ein stochastisches Modell

Für eine **bestimmte Contrade**: Zufallsvariable

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls die Contrade am } i\text{-ten Rennen teilnimmt} \\ 0, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

mit **Anfangswahrscheinlichkeiten**

$$p_1 := \mathrm{P}(X_1 = 1) \quad \text{und} \quad q_1 := 1 - p_1 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$$

und **Übergangswahrscheinlichkeiten**

$$\begin{aligned} p_{00} &:= \mathrm{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 0 \\ p_{01} &:= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1 = 1 - p_{00} \\ p_{10} &:= \mathrm{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \frac{7}{10} \\ p_{11} &:= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \frac{3}{10} = 1 - p_{10} \end{aligned}$$

Eine Rekursionsformel für die Auslosungsregeln

Mit $\boxed{p_n := \mathrm{P}(X_n = 1)}$ und $\boxed{p := p_{11} = \frac{3}{10}}$ ist

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1) = \\
&= \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) \cdot p_n + \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) \cdot (1 - p_n) = \\
&= p_{11} \cdot p_n + p_{01} \cdot (1 - p_n) = \\
&= p \cdot p_n + 1 \cdot (1 - p_n) = \\
&= 1 - (1 - p) \cdot p_n = 1 + (p - 1) \cdot p_n.
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ **lineare Differenzengleichung erster Ordnung**

Götz & Reichel 2013, S. 8 f. und

Götz & Süss-Stepancik 2013a

Lösung und Langzeitverhalten

Grundkenntnis 3 liefert

$$p_n = \frac{1-(p-1)^{n-1}}{2-p} + (p-1)^{n-1} \cdot p_1 \ .$$

Mit **Grundkenntnis 2** sehen wir

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2-p} = \frac{1}{2-\frac{3}{10}} = \frac{10}{17}$$

unabhängig von p_1!

Interpretation

Die Teilnahmewahrscheinlichkeit für eine bestimmte Contrade konvergiert mit der Anzahl der Rennen gegen $\frac{10}{17}$, das entspricht der Teilnahmewahrscheinlichkeit bei Losentscheid bei jedem Rennen.

Minimierung der Frustration

Die Zufallsvariable Y_n **zähle die Teilnahmen** bei n Rennen:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Der (zufällige) entsprechende **Bruchteil der Teilnahmen** ist dann

$$Z_n := \frac{1}{n} \cdot Y_n \ .$$

Erwartungswertbildung liefert

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n) &= 1 \cdot \mathrm{P}(X_n = 1) + 0 \cdot \mathrm{P}(X_n = 0) = p_n \ , \\ \mathrm{E}(Y_n) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \ , \\ \mathrm{E}(Z_n) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{17} = \lim_{n\to\infty} p_n \ . \end{aligned}$$

Analysis: Grenzwertsatz von CAUCHY (HEUSER 1986, S. 177)

Andere Beschreibungsmöglichkeiten
(Götz & Grosser 1999)

1. $\langle p_n \rangle$ als Cauchy-Folge
2. explizite Berechnung von $\mathrm{E}(Z_n)$
3. Rekursion als homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$p_{n+1} = p \cdot p_n + (1-p) \cdot p_{n-1}$$

4. Teilnahme als Markoff-Kette ($q_n := 1 - p_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$):

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1-p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{7}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Doppelte Diskontinuität (KLEIN 1908, S. 1 f.)

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergißt er daher alle diese Dinge rasch und gründlich. **Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann,** so nimmt er bald die alte Unterrichtstradition auf, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.“ (Hervorhebung S. G.)

Beitrag zur Linderung der Schnittstellenproblematik

Analytische Inhalte mit Schulbezug identifizieren und diese Bezüge in entsprechenden Lehrveranstaltungen (**„Schulmathematik“** an der Uni Wien) für Lehramtsstudierende aufzeigen.

Ziel: Eigenständige Anwendungskompetenz analytischer Konzepte

Wo brauche ich die Mathematik im Alltag?
Ein Beispiel. Nehmen wir Josef den Nährvater. Er legt im Jahr 1 n. Chr. 1 € bei der Bank von Bethlehem an. Josef ist ein solider Mensch und nimmt die 3,5 Prozent. Jetzt gibt es eine Regel — die müsste man lernen, bis man das Zeitliche segnet. **„70 geteilt durch die Prozentzahl im Jahr ergibt die Zahl der Jahre, die Sie warten, bis sich der Betrag verdoppelt."** *Also in unserem Fall: „70 : 3,5 = 20". Nach 20 Jahren sind es 2 €, nach 40 Jahren 4 €, nach 60 Jahren 8 €, nach 80 Jahren 16 €, nach hundert Jahren 32 €. Nach 200 Jahren haben wir den Euro schon 10 mal verdoppelt und haben 1024 €. Jetzt ist 2012. — Wir hätten jetzt einen 30-stelligen Betrag. Aber die Bank von Bethlehem gibt es nicht mehr. Damals gab es Sesterzen. Haben wir keine mehr. Gulden, Florin, Kronen, Schilling gibt es nicht mehr. Jetzt wissen Sie, warum es häufig zu einer Währungsreform kommt.* (Hervorhebung S. G.)

Zugehörige Aufgabenstellung und Lösung

Woher kommt diese — angeblich so wichtige — Regel?

Lösung: Logarithmieren von

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

und daraus

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x \quad \text{für kleine } x \text{, also}}$$

$$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad = \quad 2 \cdot K_0$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \quad \approx \quad \frac{\ln 2}{\frac{p}{100}} \approx \frac{70}{p}$$

`http://de.wikipedia.org/wiki/Josephspfennig`

Zu heilende Wunden – ein Auszug

Zum Gap Differential- und Integralrechnung in der Schule – Analysis an der Universität

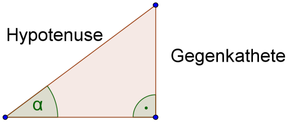
- **Reihen- und Folgendarstellung** der EULER'schen Zahl e: Warum ist

$$e = e\ ?$$

  Für Konvergenznachweis: Grundkenntnisse 1 und 3 (SCHEID 2007, S. 73 f.)

- Definition der **Sinusfunktion** (vgl. STEINBAUER 2012, S. 158)

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \text{versus} \quad \sin x := \Im(e^{ix})$$

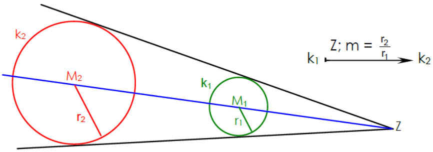


$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \frac{x^{2l}}{(2l)!} + \\ &+ \quad i \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \end{aligned}$$

Fortsetzung

- Definition der **Kreiszahl** π
  1. In der **Schule**: **Kreise** sind **zueinander ähnlich**

$$\longrightarrow \frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = \text{const. für alle Kreise} \longrightarrow \text{Zahl } \pi = \frac{U}{d} = \frac{U}{2r}$$



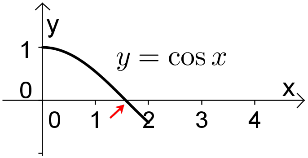


Abbildung: `http://www.uni-regensburg.de/[...]`

  2. in der **Analysis-Vorlesung**:

Definition (vgl. STEINBAUER 2012, S. 163)

Die Zahl π ist das Doppelte der Nullstelle der cos-Funktion in $[0,2]$.
Also: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $0 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$.

Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis zur Innovation der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerausbildung (LEUFER & PREDIGER 2007)

„Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule"

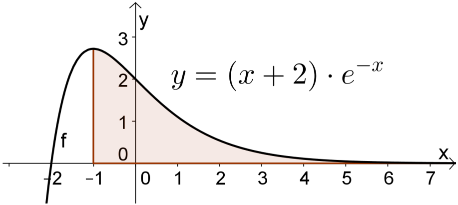


Abbildung: Die markierte Fläche wird immer größer ...

... ihr Inhalt ist „trotzdem" endlich.

„[...], ihre Interpretation und Problematik erfordert jedoch **universitäres Hintergrundwissen** und eine **didaktisch sensible Fachkompetenz**."
(S. 272, Hervorhebung S. G.)

Versuch einer Differenzierung

Grundvorstellung

(Analytische) Eigenschaft ruft „passende“ Bilder hervor.

IMAGINATION

Grundkenntnis

Fakten, Zusammenhänge bezogen auf ein bestimmtes (analytisches) Thema, die „hinreichend“ weit tragen.

WISSEN

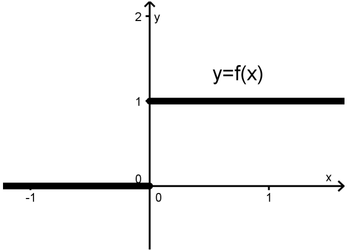
Grundeinsicht

Abruf „passender“ Methoden bei (analytischen) Tätigkeiten.

HANDLUNGSKOMPETENZ

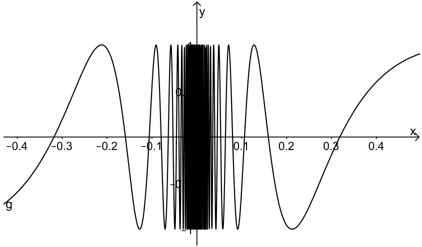
1. **Sprungstellen**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



2. **Oszillationen**

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Stoffdidaktik in der Analysis

- „$\sin \frac{1}{x}$-Funktionen": unerschöpfliche Quelle für **Begriffsschärfung**: z. B.
  - Stetigkeit einer Funktion
  - Differenzierbarkeit einer Funktion
- **Grundkenntnisse, Grundvorstellungen und Grundeinsichten** auch für analytische Konzepte formulieren: z. B. für
  - Konvergenzbedingungen einer Folge oder Reihe (GK)
  - Unstetigkeitsstellen einer Funktion (GV)
  - Ableiten einer (pathologischen) Funktion (GE)

Differentiationsregeln greifen nicht immer

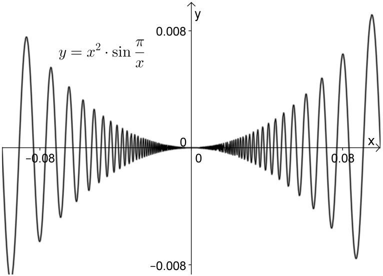


Abbildung: Ist f in 0 differenzierbar?

TIETZE et al. 1997, S. 194:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist **differenzierbar** auf $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 2x \sin\frac{\pi}{x} - \pi \cos\frac{\pi}{x}$ für $\boxed{x \neq 0}$

aber

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin\frac{\pi}{x} - \pi \cos\frac{\pi}{x} \nexists$$

Für $\boxed{x = 0}$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{\pi}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \overbrace{\sin\frac{\pi}{h}}^{\leq 1} = 0\ .$$

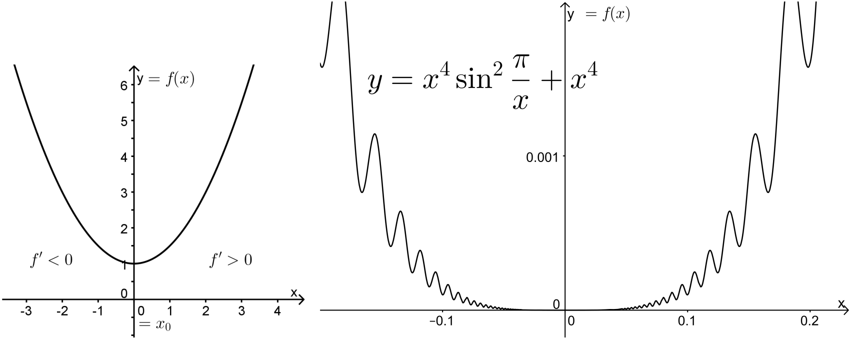


Abbildung: (Kein) Vorzeichenwechsel von f' (vgl. Götz et al. 2011, S. 130)

Es ist $\boxed{f'(0) = 0}$, und wegen $\boxed{f(x) > 0}$ für alle $x \neq 0$ ist

an der Stelle Null ein (globales) Minimum, ABER:

Für die **rechte Funktion** f ist . . .

1. für die **Nullfolge** $\boxed{x_n = -\frac{1}{n} < 0}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f'(x_n) < 0$$

2. und für die **Nullfolge** $\boxed{y_n = -\frac{4}{4n+1} < 0}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f'(y_n) > 0 \quad \text{für } n \text{ genügend groß.}$$

Für $\boxed{x > 0}$ argumentieren wir **qualitativ**:

$$f'(x) = \underbrace{x^2}_{>0} \cdot \left[\underbrace{4x \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{x}\right)}_{>0,\ \text{bel. klein}} - \underbrace{\pi \cdot \sin \frac{2\pi}{x}}_{\pm\pi} \right] \Longrightarrow$$

f' nimmt **positive** und **negative** Werte in **jeder Umgebung** von Null an!

BAUER 2013, S. 41 f.: **Schnittstellenaufgaben**

Globalziel:

Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik herstellen

- **Teilziel** A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen

  $+$ **Schulanalysis** erweist sich als

  - **nützlich** — an Vorerfahrungen anknüpfen — und
  - **relevant** — Vorerfahrungen ernst nehmen — **für Hochschulanalysis**

  $-$ Individuelle falsche Vorstellungen korrigieren

  $\sim$ Begriffe

  - **erweitern**: z. B. Integralbegriff
  - **präzisieren**: z. B. Stetigkeitsbegriff

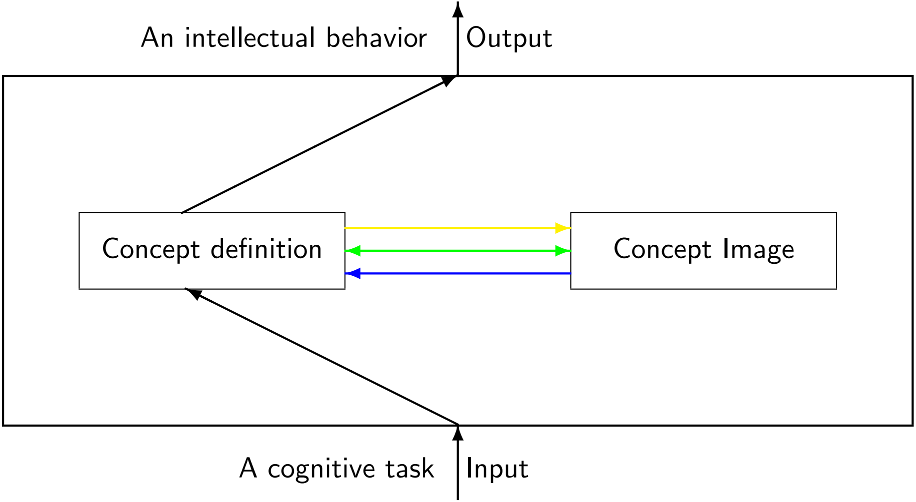
vom Hofe 1995, S. 97 f. (Hervorhebung S. G.)

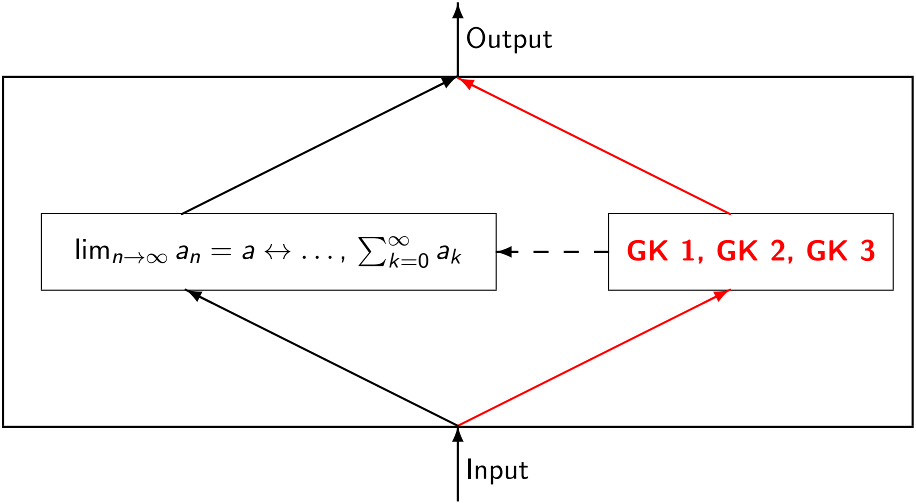
Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- **Sinnkonstituierung** *eines Begriffs durch* **Anknüpfung** *an bekannte* **Sach**- *oder Handlungs***zusammenhänge** *bzw. Handlungsvorstellungen,* **GK**
- *Aufbau entsprechender* **(visueller) Repräsentationen** *bzw. „Verinnerlichungen", die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,* **GV**
- *Fähigkeit zur* **Anwendung** *eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch* **Modellieren** *des Sachproblems mit Hilfe der* **mathematischen Struktur**. **GE**

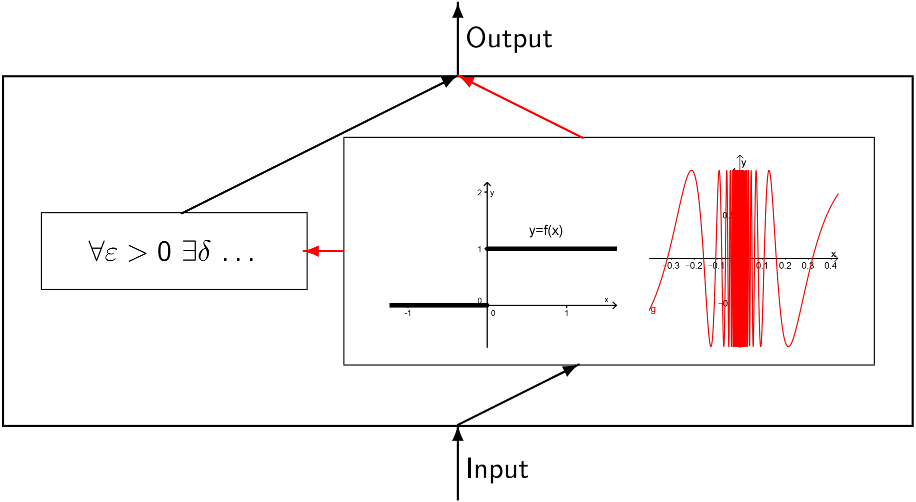
Interplay between definition and image

VINNER 1991, S. 71

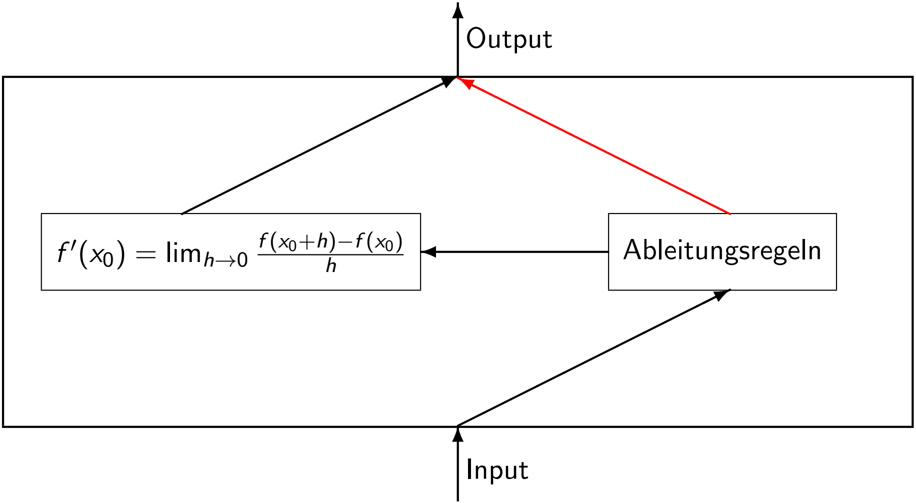



Output
$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leftrightarrow \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
GK 1, GK 2, GK 3
Input

Stetigkeit



Ableitung



Kompetenzaufbau beim Begründen (in der Geometrie)

vgl. Bruder & Pinkernell 2011, S. 5, und Bürger 1979

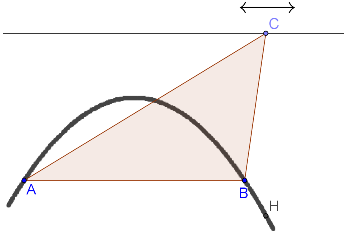


Abbildung: Eckpunkt C bewegt sich parallel zur (Verlängerung der) Seite AB

Aufgaben zum Experimentieren mit einem DGS

Was macht der Höhenschnittpunkt H (Krauter 2005, S. 278)?

Stufe 1

Bereitschaft sich auf mathematische Aufgabenstellungen einzulassen, die eine (einfache) Begründung einfordern.

Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

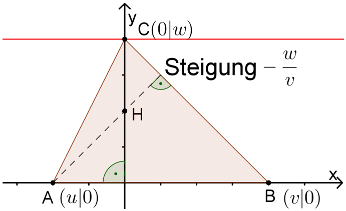


Abbildung: Das Dreieck *ABC* in einem **Koordinatensystem**

Schnitt von Höhe durch A und Höhe durch C:

$$H\left(0\middle|-\frac{uv}{w}\right) \qquad \text{(Götz \& Hofbauer 2012, S. 36)}$$

Stufe 2

Vorgegebene Begründungen verstehen, nachvollziehen und erklären können. Ein wesentlicher Aspekt besteht im Erkennen der Argumentationsbasis.

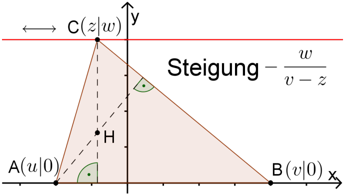


Abbildung: Der Höhenschnittpunkt H beginnt sich zu bewegen

$$\boxed{\text{geometrische Bewegung von } C \longleftrightarrow}$$

$$\boxed{\text{numerische Veränderung der } (x\text{-})\text{Koordinate } z \text{ von } C}$$

Stufe 3

(Mathematische) Begründungen in Kommunikationssituationen (z. B. Warum ist ein Lösungsweg / eine Konstruktion / . . . korrekt / richtig / zielführend/ . . . ?) darlegen und argumentieren können.

Analyse des Ergebnisses

Wiederum Schnitt der Höhen durch A und C:

$$H\left(z\left|\frac{v-z}{w}\cdot(z-u)\right.\right) \quad\Longrightarrow\quad y_H=\frac{v-x_H}{w}\cdot(x_H-u)$$

- **Parabel geht durch A und B**, auch geometrisch evident: wenn C genau über A liegt, ist das Dreieck ABC rechtwinkelig bei A und H liegt in A
- $\boxed{x_C=x_H=z}$ folgt aus dem speziell gewählten Szenario
- Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat $\to$ **Scheitelkoordinaten** $(x_S|y_S)$:

$$x_H\mapsto\frac{1}{w}\cdot\left(-\left(x_H-\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x_S}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2-vu}_{w\cdot y_S}\right)$$

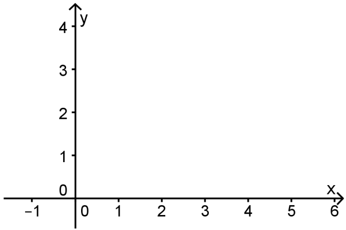
Eine fundamentale Idee (?)

Schweiger 2013

Koordinaten: eine fundamentale Idee der Mathematik

- seit Jahrhunderten üblich: **Zeitkriterium**
- in verschiedenen Teilgebieten verwendet: **Horizontalkriterium**
- auf verschiedenen Niveaus vorkommend: **Vertikalkriterium**
- anknüpfend an Alltagserfahrungen: **Sinnkriterium**

Schwill 1993, S. 23



Begründen als Eigentätigkeit der SchülerInnen

Vertikalkriterium $\longrightarrow$ Stufe 4

Eigenständiges Finden einer Begründung zu einer (mathematischen) Aussage / Vermutung und / oder Argumentation derselben, inklusive Wahl der Argumentationsbasis.

> *Eine Schwierigkeit bei der Behandlung von Beweisen im Unterricht liegt darin, daß in vielen Fällen Schüler nicht in der Lage sind, einen Beweis oder auch nur Teile eines Beweises* **selbständig** *zu finden.*
>
> *Das selbständige Führen von Beweisen wird im allgemeinen aber nur dann möglich sein, wenn dem Schüler zumindest ein Beweis bekannt ist, der* **eine starke Ähnlichkeit** *mit dem zu führenden Beweis hat [. . .].*

Bürger 1979, S. 116 und S. 121 (Hervorhebung S. G.)

Begründe (KRAUTER 2005, S. 75):

Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den drei Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

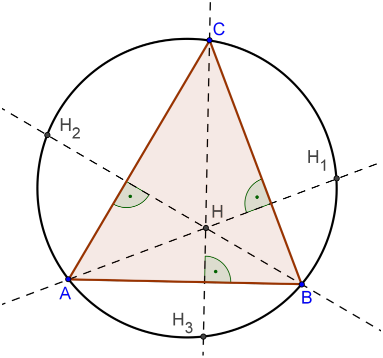


Abbildung: Höhenschnittpunkt H und Spiegelungspunkte H_1, H_2, H_3

Analoge Berechnungen

(Götz & Hofbauer 2012, S. 36)

1. Schnitt der Mittelsenkrechten der Seiten AB und AC $\longrightarrow$ **Umkreismittelpunkt**

$$U\left(\frac{u+v}{2}\middle|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w}\right)$$

2. Berechnung des Abstands von U zu C $(0|w)$ $\longrightarrow$

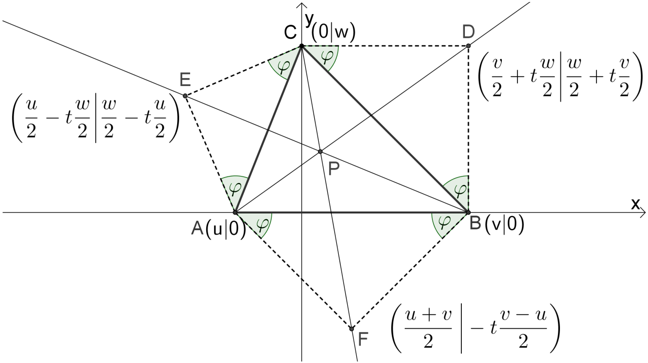
$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{2}-\frac{uv}{2w}\right)^2=\boxed{\text{CAS}}=\frac{(u^2+w^2)\cdot(v^2+w^2)}{4\cdot w^2}$$

3. $H\left(0\middle|-\frac{uv}{w}\right)$ an AB (auf der x-Achse) **spiegeln**:

$$H_3\left(0\middle|\frac{uv}{w}\right)$$

4. **selbe Abstandsberechnung** wie zuvor: $\boxed{\overline{UH_3}=\overline{UC}}$ – das genügt!

Die KIEPERThyperbel (HOFBAUER 2013)



Dabei ist $\boxed{\varphi \in [-90°, 90°]}$ und $\boxed{\tan\varphi =: t \in (-\infty, \infty)}$.

Die Ecktransversalen schneiden einander in einem Punkt P unabhängig von φ.

Mächtigkeit der $(t)uvw$-Sprache

1. Gerade $\boxed{l(A,D)}$ **geschnitten** mit der Geraden $\boxed{l(C,F)}$ $\to$ **Schnittpunkt** $P\ (x_p|y_p)$ mit

$$x_P = \frac{t(u^2v + uv^2 + uw^2 + vw^2) + w(v^2 - u^2)}{t^2w(v-u) + 2t(u^2 - uv + v^2 + w^2) + 3w(v-u)}$$

2. Jetzt: $\boxed{u \longleftrightarrow v}$ und $\boxed{t \mapsto -t}$ $\Longrightarrow$

$$C \mapsto C\ , \quad F \mapsto F\ , \quad A \mapsto B \quad \text{und} \quad D \mapsto E$$

3. **Schnitt nochmals** mit dieser Vertauschung und dieser Ersetzung $\to$

$$\boxed{l(B,E) \cap l(C,F)} \qquad \text{mit}$$

$$\boxed{x_P(\text{nun})} \quad \boxed{=} \quad \boxed{x_p(\text{vorher})}\ ,$$

da x_p invariant gegenüber $u \leftrightarrow v$ und $t \mapsto -t$ ist!

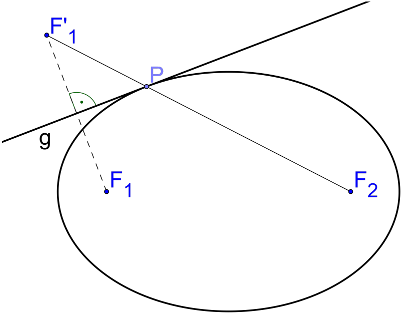


Abbildung: Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Tangente g; F_1' ist der an g gespiegelte Punkt F_1

Kompetenztrainingslager (Bruder 2012):

1. **Stufe 2 (Handlungskompetenz)**:
   Erkläre die nebenstehende Tangentenkonstruktion an eine Ellipse im Punkt P!
2. **Stufe 3 (Metakompetenz)**: **Ergänze und begründe**:
   Gegeben seien zwei Punkte F_1 und F_2 auf derselben Seite einer Geraden g. Dann gibt es eine Ellipse mit . . .

Jetzt: ein Punkt und drei Geraden

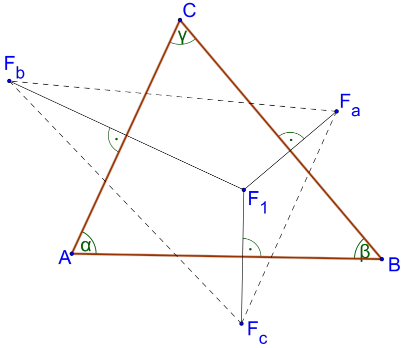
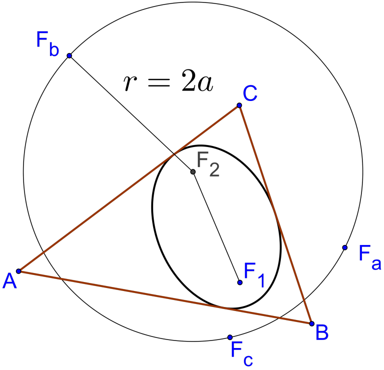


Abbildung: F_1 im Dreieck ABC

Stufe 4:

1. **Spiegle** F_1 an den Seiten des Dreiecks ABC!
2. Suche F_2 so, dass $|F_2F_a| = |F_2F_b| = |F_2F_c| =: 2a$ $\longrightarrow$ F_2 ist **Umkreismittelpunkt** von $\Delta F_aF_bF_c$
3. Trägergeraden von AB, AC und BC sind **Tangenten einer Ellipse** mit
   - $\boxed{F_1}$ und $\boxed{F_2}$ als **Brennpunkte** und
   - **großer Halbachse** der Länge $\boxed{a}$.

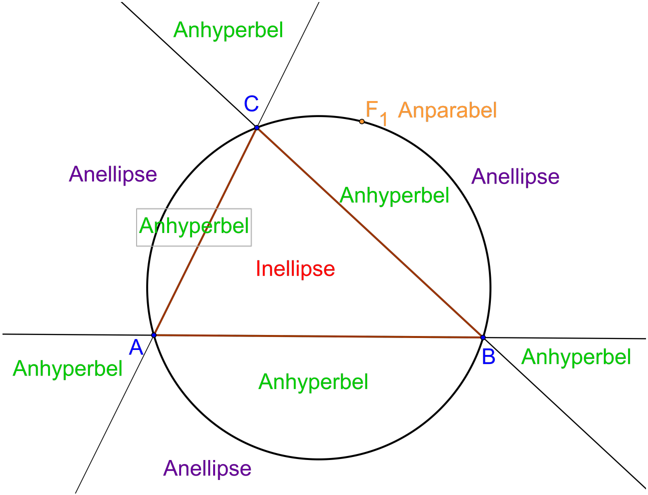
Inellipsen



Satz

Zu jedem beliebigen Punkt F_1 im Inneren eines Dreiecks existiert eine Inellipse, die F_1 als Brennpunkt hat.

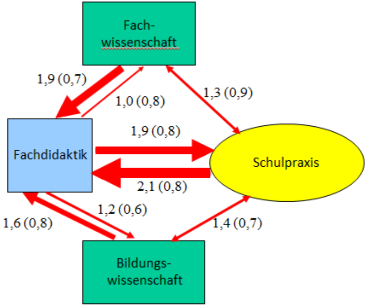
Eine Landschaft von berührenden Kegelschnitten



(Götz & Hofbauer 2013)

Die wichtigste Kompetenz

Die **Vermittlungskompetenz** stellt die Fähigkeit zur **Auswahl und Entwicklung geeigneter Materialien** dar, um Fachwissen an die Lernenden weiterzugeben (didaktische Rekonstruktion). Dabei spielen Methoden- und Planungskompetenz eine entscheidende Rolle.



Die **vier Säulen** der LA-Ausbildung an der Uni Wien und **die Stärke ihrer Beziehungen**:

„sehr stark“ (3) – „stark“ (2) – „gering“ (1) – „gar nicht“ (0)

(WS 2010/11)

Literatur 1

- Bauer, T.: *Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben*. In: C. Ableitinger, J. Kramer und S. Prediger (Hrsg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen. Springer Spektrum, Wiesbaden 2013, S. 39–56.
- Biehler, R.: *Simulation als systematischer Strang im Stochastikcurriculum*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, für die GDM herausgegeben von Hans-Wolfgang Henn. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2003, S. 109–112.
- Brinkmann, A., Maaß, J., Ossimitz, G. und Siller, H.-St.: *Vernetzungen und vernetztes Denken im Mathematikunterricht*. In: A. Brinkmann, J. Maaß und H.-St. Siller (Hrsg.): Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1. Aulis Verlag, München 2011, S. 7–21.

Literatur 2

- Bruder, R.: *Konsequenzen aus den Kompetenzen?* Vortrag auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik am 06.03.2012 in Weingarten. `http://www.math-learning.com/files/120306wg.pdf`, 14.1.2014.
- Bruder, R. und Pinkernell, G.: *Die richtigen Argumente finden*. mathematik lehren 168 / 2011, S. 2–7.
- Bürger, H.: *Beweisen im Mathematikunterricht — Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II*. In: W. Dörfler und R. Fischer (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 2. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1979 und B. G. Teubner, Stuttgart, S. 103–134.
- Engel, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 1. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973.

Literatur 3

- Etzlstorfer, S.: *$a^2 + b^2 = c^2$ — ¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien*. Diplomarbeit, Universität Wien 2010.
- Fruttero, C. und Lucentini, F.: *Der Palio der toten Reiter*. Piper, München 1995 (2. Auflage).
- Götz, S.: *Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons*. DdM **21** (1993), Heft 3, S. 182–206. Erratum im PM Jahresverzeichnis 2001, S. 4.
- Götz, S. *Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, für die GDM herausgegeben von G. Greefrath, F. Käpnick und M. Stein. Band 1. WTM, Münster 2013, S. 364–367.

Literatur 4

- Götz, S. und Grosser, M.: *Über das Pferderennen in Siena*. Mathematische Semesterberichte **46** (1999), S. 77–92.
- Götz, S., Grossmann, W., Jenko, E. und Vorderwinkler, K.: *Fachdidaktik an der Universität Wien. Eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden*. Erscheint voraussichtlich 2014 im journal für lehrerinnen- und lehrerbildung.
- Götz, S. und Hofbauer, F.: *Immer geradeaus in Dreiecken! Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft*. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 44 / **54. Jahrgang** / April 2012, S. 35–39 (mit einer Online-Ergänzung).
- Götz, S. und Hofbauer, F.: *Zur Verwandtschaft des Inkreises eines Dreiecks*. Eingereicht 2013.

Literatur 5

- Götz, S. und Reichel, H.-C. (Hrsg.): *Mathematik 7* von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien 2011.
- Götz, S. und Reichel, H.-C. (Hrsg.): *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien 2013.
- Götz, S. und Süss-Stepancik, E.: *Es nähert sich an, ... und dann? Folgenreiches zum Grenzwert von Folgen*. mathematik lehren 180 / Oktober 2013a („Die faszinierende Welt der Grenzwerte"), S. 26–29 (mit Online-Material).
- Götz, S. und Süss-Stepancik, E.: *Lernpfade als Wegweiser zur Ausbildung von Begründungskompetenz im Mathematikunterricht*. Eingereicht 2013b.
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. B. G. Teubner, Stuttgart 1986 (4., durchgesehene Auflage).
- Hofbauer, F.: *Die Kieperthyperbel*. Unveröffentlichtes Manuskript, Wien 2013.

Literatur 6

- Kiesl, H.: *Match me if you can. Mathematische Gedanken zur Champions-League-Achtelfinalauslosung*. Mitteilungen der DMV **21**/2013, S. 84–88.
- Kießwetter, K.: *Vernetzung als unverzichtbare Leitidee für den Mathematikunterricht – und warum mathematikdidaktische Bemühungen sehr oft in kurzschrittige und kurzsichtige Einspurigkeit münden*. mathematik lehren, Heft 58 (1993), S. 5–7.
- Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. B. G. Teubner, Leipzig 1908.
- Kratz, H.: *Das Problem der vertauschten Briefe – zwei Wege zur Herleitung einer Rekursionsformel*. Stochastik in der Schule **25** (2005), S. 11–15.
- Krauter, S.: *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München 2005.

Literatur 7

- Leufer, N. und Prediger, S.: *„Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule". Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung*. In: A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann und S. Prediger (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Franzbecker, Hildesheim 2007, S. 265–276.
- Nikodim, M.: *Motivation und Erwartungshaltung von Mathematikstudierenden – Auswertung der Fragebögen zu „Einführung in die Analysis"* an der Universität Wien. Unveröffentlichtes Manuskript, Wien 2013.
- Rasfeld, P.: *Das Rencontre-Problem, eine Quelle für den Stochastikunterricht von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, für die GDM herausgegeben von Gabriele Kaiser. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2001, S. 496–499.

Literatur 8

- Scheid, H.: *Folgen und Funktionen. Eine Einführung in die Analysis*. WTM, Münster 2007.
- Schuppar, B.: *Elementare Numerische Mathematik. Eine problemorientierte Einführung für Lehrer und Studierende*. vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1999.
- Schweiger, F.: *Fundamentale Ideen der Mathematik*. Vortrag im Rahmen des Festkolloquiums für M. Kronfellner anlässlich seiner Pensionierung. TU Wien, 2013.
- Schwill, A.: *Fundamentale Ideen der Informatik*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **25** (1993), 1, S. 20–31.
- Steinbauer, R.: *Einführung in die Analysis*. Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien 2012. `http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA_Vo_2012-06-14.pdf`, 25.2.2014.

Literatur 9

- Székely, G.: *Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1990.
- Tietze, U.-P. et al.: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1997.
- Vinner, S.: *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. In Tall, D. (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, Dordrecht et al. 1991, 65–81.
- vom Hofe, R.: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik (herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid). Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u. a. 1995.
- Wittmann, E. Ch.: *Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art*. Erscheint 2014 in mathematica didactica.