Übung: Schulmathematik 3 (Angewandte Mathematik)

Stefan Götz, Waltraud Huyer und Andreas Ulovec

SS 2015

Blatt 5

31. *Näherungswerte für π.* Die folgenden Brüche bzw. Dezimalbrüche sind als Näherungen für π geläufig:

$$\frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ 3,14;\ 3,1416\ .$$

Wie genau sind die Näherungen jeweils (absoluter und relativer Fehler)? Wie viele signifikante Stellen haben sie?
Hinweis: Benutzen Sie zum Vergleich den Taschenrechnerwert für π!

32. *Intervallrechnung 1.* Ein Stück Aluminiumrohr wurde wie folgt ausgemessen:

Außendurchmesser	$d_a = 22,0 \pm 0,1\,mm$	(Messgerät: Schublehre)
Innendurchmesser	$d_i = 20,3 \pm 0,1\,mm$	(Messgerät: Schublehre)
Länge	$L = 305 \pm 0,5\,mm$	(Messgerät: Maßband)
Masse	$M = 50 \pm 0,5\,g$	(Messgerät: Briefwaage)

(a) Bestimmen Sie daraus die Dichte von Aluminium!

(b) Berechnen Sie die relativen Fehlerschranken für die gemessenen Werte und für das Ergebnis!

33. *Intervallrechnung 2.* Beim Besuch eines Aussichtsturms wurde die Falldauer eines kleinen Steins zu $\tilde{t} = 2,6\,s$ gestoppt. Die Messgenauigkeit für die Zeit wird mit $0,1\,s$ angesetzt. Aus der Falldauer $t = 2,6 \pm 0,1\,s$ und der Erdbeschleunigung $g = 9,81\,m/s^2$ kann man die Höhe H des Turms bestimmen: $H = \frac{1}{2}gt^2$.

(a) Wie genau ist die Höhe des Turms bestimmbar?
Hinweis: Der Zahlenwert 9,81 für g ist gerundet.

(b) Wie genau müsste man die Zeit messen, um die Höhe des Turms auf $\pm 0,5\,m$ genau zu bestimmen?

(c) Ein systematischer Fehler der Messung liegt darin, dass die Laufzeit des Schalls vom Aufprall für die Zurücklegung der Strecke vom Boden zur Turmspitze (bzw. Aussichtsplattform) in der Stoppzeit enthalten ist. Ist dieser Fehler erheblich? Wenn ja, wie kann er korrigiert werden? Gibt es noch andere systematische Fehler bei dieser Messung?

34. *Berechnung von π.* Zur näherungsweisen Berechnung von π haben wir in der Vorlesung regelmäßige n-Ecke dem Einheitskreis einge- (Seitenlänge s_n) und umschrieben (Seitenlänge S_n): Abbildung 19.

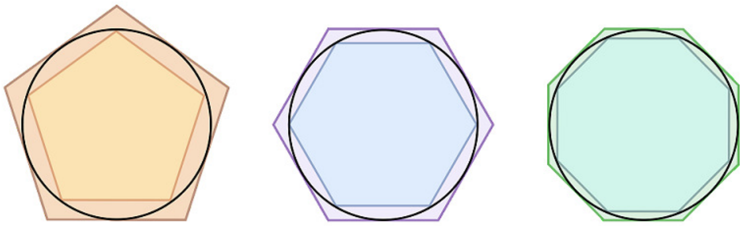

Abbildung 19: Näherungsweise Berechnung von π nach ARCHIMEDES

Zeigen Sie:

(a) $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n{}^2}}$ und

(b) $S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$.

35. *Quadratische Gleichungen.*
Berechnen Sie die Lösungen x_1, x_2 mit $|x_1| > |x_2|$ der quadratischen Gleichung

(a) $x^2 - 12x + 1 = 0$

(b) $x^2 - 26x + 1 = 0$

mit dreistelliger Rechnung, und zwar (1) nach der üblichen kleinen Lösungs- (pq-)formel und (2) x_1 (siehe oben!) mit der eben genannten Lösungsformel und x_2 gemäß VIETA mittels $x_2 = \frac{q}{x_1}$!

(c) Wie groß ist in (a) und (b) jeweils der relative Fehler von x_1, x_2, wenn die Ergebnisse der dreistelligen Rechnung mit Taschenrechnerergebnissen verglichen werden?

(d) Wie in (a) und (b) für $x^2+6543210x+2 = 0$ mit der vollen Genauigkeit Ihres Taschenrechners.

36. *Numerik algebraisch äquivalenter Terme.* Man möchte $(\sqrt{2} - 1)^6$ mit Hilfe des Näherungswertes 1,4 für $\sqrt{2}$ berechnen. Ist das numerisch günstig? Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit denen, die Sie bekommen, wenn Sie die folgenden äquivalenten Ausdrücke auswerten:

$(3 - 2\sqrt{2})^3$	$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$	$\frac{1}{(7+5\sqrt{2})^2}$	$\frac{1}{99+70\sqrt{2}}$
$(5\sqrt{2} - 7)^2$	$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$	$99 - 70\sqrt{2}$	

Zeigen Sie die Äquivalenz der angeführten Terme!

37. *Bestimmung der Erdbeschleunigung g.*

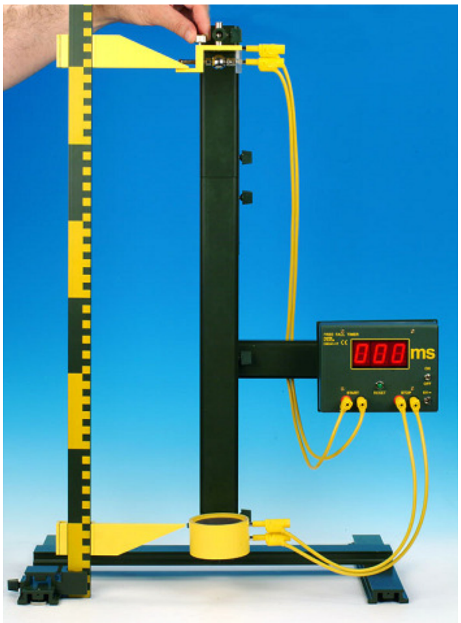

Abbildung 20: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g

Bei einem Fallversuch zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g (Abbildung 20) wird die Fallzeit eines Körpers gemessen: $t = 0,42 \pm 0,01\,s$. Die Fallstrecke s beträgt $0,85 \pm 0,005\,m$. Es gilt das Fallgesetz $s = \frac{g}{2}t^2$. Bestimmen Sie daraus g sowie eine absolute Fehlerschranke

(a) mit Hilfe des *relativen* Fehlers,

(b) direkt mittels partieller Ableitungen!

Wie wirken sich die beiden Messfehler jeweils auf den Gesamtfehler aus?

38. *Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung von Funktionswerten.*
Um welchen Faktor unterscheidet sich der absolute Fehler Δy von Δx bzw. der relative Fehler r_y von r_x bei der Auswertung folgender Funktionen an den jeweils gegebenen Stellen x?

(a) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ bei $x = 1$ und $x = 10$

(b) $y = e^{-x^2}$ bei $x = 1$ und $x = 3$

(c) $y = x^3 - 3x + 5$ bei $x = 1$ und $x = 10$