Übung: Schulmathematik 3
(Angewandte Mathematik)

Stefan Götz, Waltraud Huyer und Andreas Ulovec
SS 2015

Blatt 1

1. *Verkehrsdurchsatz.* Bei welcher (vorgegebenen) Geschwindigkeit kann bei einer einspurigen Fahrbahn (Baustelle) eine möglichst große Anzahl von Fahrzeugen in einer bestimmten Zeitspanne eine bestimmte Stelle (Zählstelle) passieren?
   Hinweis: Alle Fahrzeuge fahren mit konstanter Geschwindigkeit v, sie haben dieselbe Länge l und denselben Sicherheitsabstand s zum vorausfahrendenden Fahrzeug. Der Durchsatz D sei die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Zeiteinheit diese Zählstelle passieren: Abbildung 1.

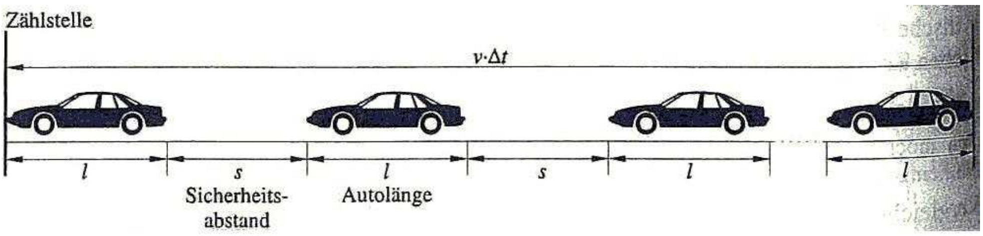

Abbildung 1: Realmodell des Verkehrsdurchsatzes

Dabei ist s auf vier Arten zu modellieren:

(a) Die „Tacho-halbe-Regel“: $s_1(v) = \frac{1}{2} \cdot \langle v \rangle \, m$, d. h. die Maßzahl $\langle v \rangle$ der auf dem Tacho angezeigten Geschwindigkeit halbiert und mit der Einheit Meter versehen, wird als Sicherheitsabstand genommen;

(b) Die „1,5-Sekunden-Regel“: $s_2(v) = v \cdot 1,5\, s$, d. h. als Sicherheitsabstand wird die Strecke gewählt, die man in 1,5 Sekunden zurücklegt;

(c) Die „Fahrschul-Prüfungs-Regel“: $s_3(v) = [(\langle v \rangle/10)^2 + 3 \cdot (\langle v \rangle/10)]\, m$;

(d) Die „Anhalteweg-Regel“: $s_4(v) = v \cdot t_R + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{b}$, wobei t_R die Reaktionszeit in Sekunden und b die Bremsverzögerung in m/s^2 ist.

2. *Das Milchpackungsproblem.* Abbildung 2 zeigt das Netz einer Milchpackung mit quadratischer Grundfläche, die einen Liter fassen soll. Berechnen Sie (die) Maße b und h, damit der Materialbedarf ein Minimum wird!

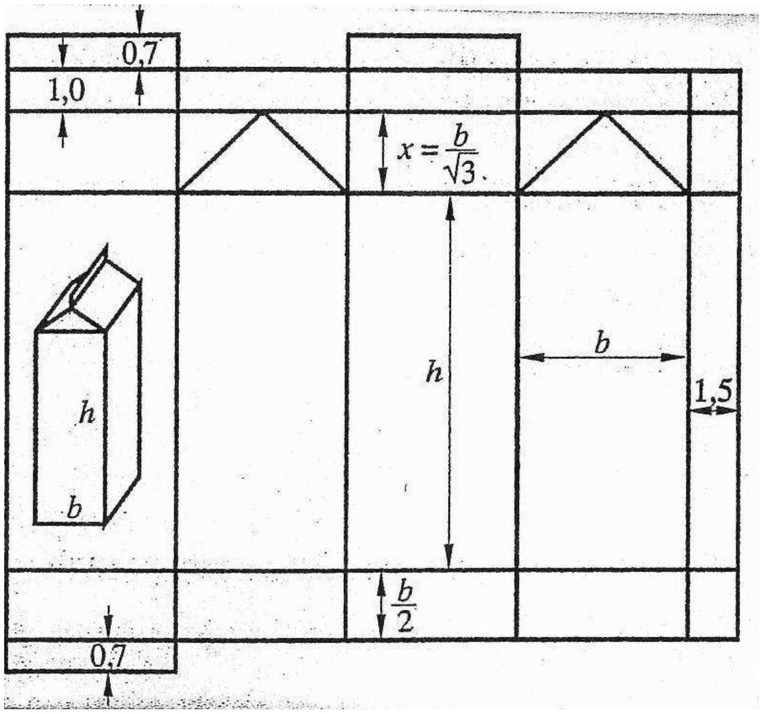

Abbildung 2: Das Netz einer Milchpackung

Vergleichen Sie die erhaltenen Maße mit jenen, die aus einem idealisierten Modell ohne Berücksichtigung der Falze resultieren!

3. *Parameterdarstellung von Kurven.*

   (a) Wenn ein Kreis ohne zu gleiten auf einer Geraden abrollt, beschreibt ein mit ihm fest verbundener Punkt P eine Kurve, die (gewöhnliche) **Zykloide** heißt. Liegt P auf dem Kreisumfang, so entsteht eine *spitze Zykloide*. Liegt P innerhalb des Kreises, so ergibt sich eine *gestreckte Zykloide*, liegt P hingegen außerhalb des Kreises, dann erhält man eine *verschlungene Zykloide*. Leiten Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve her (r sei der Radius des Kreises, s der Abstand von P zum Kreismittelpunkt M) und variieren Sie dann die Parameter! Welche Kurven entstehen jeweils?

   (b) Ein Kreis k_2 rollt *außen* auf einem Kreis k_1 ab. Leiten Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve her und zeichnen Sie die so entstehenden **Epizykloiden** für

      i. $r_1 : r_2 = 2 : 1$, $s = 2/3 \cdot r_2$;
      ii. $r_1 = r_2$ und $s = r_2$ (**Kardioide**);
      iii. $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $s = 1$ (**Nephroide**).

(c) Ein Kreis k_2 rollt *innen* auf einem Kreis k_1 ab. Leiten Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve her und zeichnen Sie die so entstehenden **Hypozykloiden** für

   i. $r_1 : r_2 = 4 : 1$, $s = r_2$ (**Astroide**, Sternkurve);

   ii. $r_1 : r_2 = 3 : 1$ und $s = r_2$ (STEINER'**sche Kurve**, Hypotrochoide mit Spitzen);

   iii. $r_1 : r_2 = 3 : 1$ und $s = \frac{r_2}{2}$ (Hypotrochoide mit abgerundeten Ecken);

   iv. $r_1 : r_2 = 3 : 1$ und $s = \frac{3}{2} \cdot r_2$ (Hypotrochoide mit Schleifen);

   v. $r_1 : r_2 = 2 : 1$ (Ellipse)!

   vi. Welche Kurve entsteht, wenn wieder $r_1 = 2$, $r_2 = 1$ und $s = 1$ gesetzt werden?

4. *Verallgemeinertes* HERON'*sches Verfahren.*

   (a) Berechnen Sie mit der rekursiven Formel

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} \cdot \left[(p-1) \cdot x_n + \frac{a}{{x_n}^{p-1}} \right]$$

   mit $a > 0$ und $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, Näherungswerte für $\sqrt[3]{2}$! Wählen Sie einen geeigneten und einen ungünstigeren Startwert x_0!

   (b) Zeigen Sie, dass das in (a) definierte Verfahren für ${x_0}^p > a$ von oben gegen $\sqrt[p]{a}$ strebt!
   Hinweis: Mit Hilfe der BERNOULLI'schen Ungleichung erkennt man, dass $\left(x - \frac{x^p - a}{p x^{p-1}} \right)^p \geq a$, also ${x_n}^p \geq a$ ist.

   (c) Wie hängt das in der Vorlesung behandelte Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln mit diesem zusammen?

   (d) Gibt es auch hier (vgl. die Vorlesung) einen Zusammenhang mit dem NEWTON'schen Näherungsverfahren? Wenn ja, welchen?

5. BERTRAND'*sches Kästchenproblem.* In einem Raum stehen vier Kästchen mit je zwei Schubladen (links, rechts). Ein Kästchen enthält in jeder Lade eine Goldmünze, eines links eine Gold- und rechts eine Silbermünze, eines links eine Silber- und rechts eine Goldmünze, und schließlich das vierte Kästchen in jeder Lade eine Silbermünze: Abbildung 3.

   (a) Thomas hat ein Kästchen zufällig gewählt und zufällig eine Lade geöffnet; er findet eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Lade dieses Kästchens eine Goldmünze enthält?

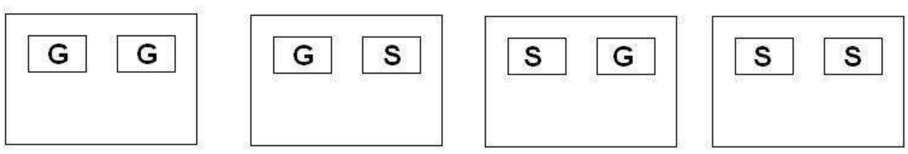

Abbildung 3: Zum BERTRAND'schen Kästchenproblem

   (b) Thomas wählt ein Kästchen und öffnet *beide* Laden. Er erzählt dies seinem Freund und dieser fragt ihn neugierig, ob er das Kästchen mit zwei Silbermünzen erwischt habe. „Nein“ antwortet Thomas. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit für den Freund, dass Thomas in beiden Laden eine Goldmünze fand?

   (c) Wie ändert sich die Situation jeweils, wenn nur ein „gemischtes“ Kästchen (Gold/Silber) vorhanden ist, also insgesamt nur mehr drei Kästchen zur Auswahl stehen?

6. EUKLID'*scher Algorithmus.*

   (a) Demonstrieren Sie am Beispiel der beiden natürlichen Zahlen 1794 und 1248 den EUKLID'schen Algorithmus! Weisen Sie nach, dass er die in der Vorlesung genannten Eigenschaften eines Algorithmus tatsächlich erfüllt!

   (b) Zeigen Sie, dass der EUKLID'sche Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen liefert!

   (c) Welcher grundlegende Satz der Zahlentheorie steckt hinter diesem Verfahren? Formulieren und beweisen Sie!

7. *Heuristik.*

   (a) “If the sum of two numbers is 12 and their product is 4, find the sum of their reciprocals.”

   (b) Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er sieben Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann ein Apfel übrig. Wie viele hatte er zu Beginn?

8. *Analytische Geometrie.* Gehen Sie von der Lage eines beliebigen (ebenen) Dreiecks im Koordinatensystem wie in der Vorlesung aus und ermitteln Sie eine Formel für die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U und für den Umkreisradius r des Dreiecks!

   In Formelsammlungen finden wir oft die Formel $r = \frac{abc}{4A}$, wobei a, b und c die Seitenlängen des Dreiecks sind und A der Flächeninhalt. Weisen Sie die Äquivalenz der eben gefundenen Formel mit dieser nach!