Aspekte der Mathematik: Einheiten 6,7,8
Mathematik als Unterrichtsfach

STEFAN GÖTZ*

Zusammenfassung

Die Fachdidaktik ist die Berufswissenschaft der Lehrenden. Für die Mathematik (und ein bisschen darüber hinaus) soll sie im Folgenden vorgestellt werden. Dazu werden wir ihre Aufgabengebiete, ausgewählte Konzepte und schulpraktische Konsequenzen beleuchten.

1 Aufgabengebiete der Fachdidaktik Mathematik

1.1 Auswahl und Begründung von Zielen des Mathematikunterrichts

Für die *Sekundarstufe II* wird eine *vertiefte* Allgemeinbildung angestrebt, die von einer Wissenschaftsorientierung begleitet wird (KLAFKI, zitiert nach [6], S. 20). Die ab dem Schuljahr 2014/15 an AHS (allgemeinbildende höhere Schulen) eingeführte standardisierte schriftliche Reifeprüfung *(„Zentralmatura")* in Mathematik sieht eine *höhere* Allgemeinbildung als ihr Ziel, welche sich durch eine Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen auszeichnet (R. FISCHER, [2], S. 4). In der *Sekundarstufe I* definieren die sogenannten *Bildungsstandards M8* (das heißt für die achte Schulstufe) *Lebensvorbereitung* und *Anschlussfähigkeit* als zu erreichende Kompetenzen ([5], S. 7 f.).

*`Stefan.Goetz@univie.ac.at`

Zur *Lebensvorbereitung* gehört es, mathematische Zeichen, Darstellungen und Objekte, die als Inventar unserer Lebenswelt fast überall angetroffen werden, deuten zu können. Mathematik ist also ein wichtiges Mittel menschlicher *Kommunikation*. Denken wir beispielsweise an einen angekündigten Preisnachlass von 10%, den wir in der Preisrelation $p_{\text{neu}} = p_{\text{alt}} \cdot 0,9$ als Formel darstellen können. Oder Wachstumskurven, denen wir immer wieder begegnen: Abbildung 1[1] zeigt die (prognostizierte) Entwicklung der Erdbevölkerung. In Abbildung 2[2] wird das Ergebnis einer Umfrage 2013 (Umfang $n = 8000$) über das Sportverhalten der Österreicher und Österreicherinnen als Kreisdiagramm dargestellt.

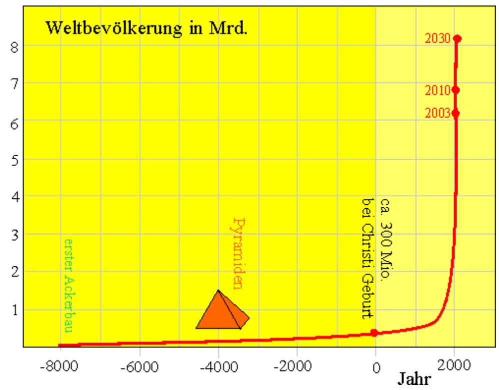


Abbildung 1: Wachstum der Erdbevölkerung

Weiters ist die Mathematik ein *Erkenntnis-* und *Konstruktionsmittel*. Durch sie bekommen wir einen speziellen Blick auf die Welt und sie kann uns helfen, die Welt zu strukturieren, zu ordnen und zu gestalten. Das Lottospiel „6 aus 45“ kann zum Beispiel durch Gewinnwahrscheinlichkeiten beschrieben werden: die Wahrscheinlichkeit etwa, einen „Sechser“ anzukreuzen, ist $\frac{1}{\binom{45}{6}}$.

Auch in der Wirtschaft werden immer mehr mathematische Methoden zur Erkenntnis- und Entscheidungsfindung herangezogen. Auf elementarem Niveau sei zum Beispiel eine *Kostenfunktion* K durch $K(x) = 0,1x^2 + 0,1x + 2$

[1] `http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/wetter-und-klima/lb/treibhauseffekt-bevoelkerungswachstum`

[2] `http://www.sportunion-wien.at/de/newslettertexte/marketshow-newslettertext-----oh-du-mein-faules-oesterreich`

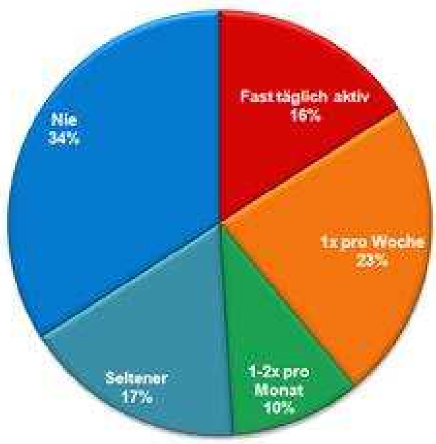


Abbildung 2: Wie sportlich ist Österreich?

gegeben, wobei x die Absatzmenge (in Mengeneinheiten) eines bestimmten Produkts ist. Der Funktionswert $K(x)$ wird in Geldeinheiten gemessen. Ein *Preis-Absatzzusammenhang* wird durch $10p + 2,8x = 32$ angegeben, dabei ist p der Preis pro Stück. So können wir eine *Erlösfunktion* E bilden: $E(x) = p \cdot x = \frac{32-2,8x}{10} \cdot x = 3,2x - 0,28x^2$. Schließlich erhalten wir eine *Gewinnfunktion* G mit $G(x) = E(x) - K(x) = -0,38x^2 + 3,1x - 2$. In Abbildung 3 sehen wir die Graphen von K, p und G. Nullsetzen der Funktion

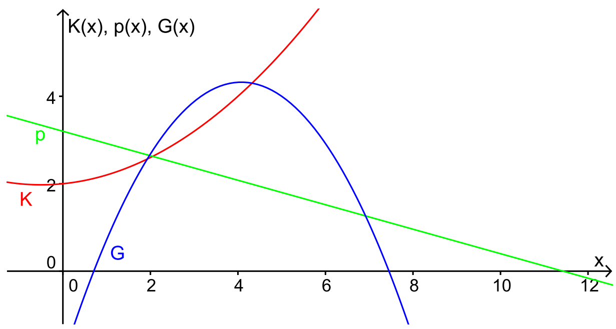


Abbildung 3: Graphen der Kosten-, Preis- und Gewinnfunktion

G liefert den Gewinnbereich: $[0,7;7,45]$.

Abschließend ein Beispiel, das im Wesentlichen mit Unterstufenmathematik zu bewältigen ist. Ein Satellit schwebt $400\,km$ über der Erdoberfläche. Welcher Teil davon kann mit einem Funksignal vom Satelliten aus erreicht werden? In der vierten Klasse (achte Schulstufe) kann folgendes *Modell* zur Beschreibung der vorliegenden Situation erstellt werden: Abbildung 4. Die Erde

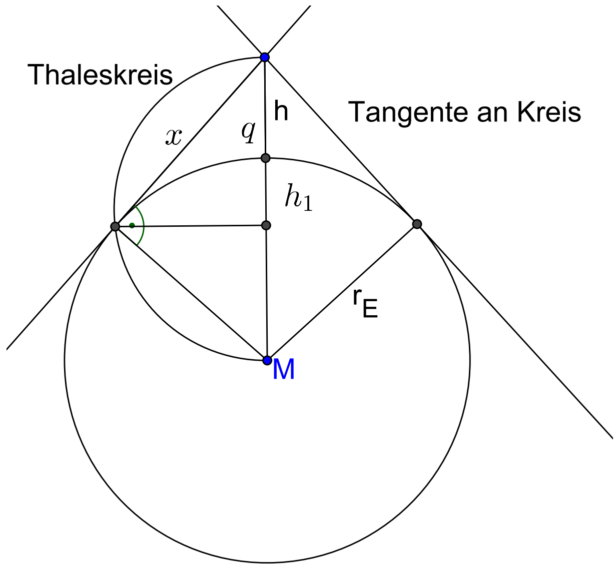


Abbildung 4: Ein einfaches Modell (nicht maßstäblich)

wird also als Kugel gesehen, Berge zum Beispiel werden nicht berücksichtigt. Der Erdradius wird näherungsweise mit $r_E = 6370\,km$ angenommen. Mit Hilfe des *Lehrsatzes des* Pythagoras ergibt sich

$$x = \sqrt{(6370+400)^2 - 6370^2} \approx 2290\,km\ .$$

Der *Kathetensatz* liefert $x^2 = q \cdot (6370+400)$, woraus $q = \frac{2290^2}{6370+400} \approx 780\,km$ folgt. Mit $h_1 = q - h = 380\,km$ haben wir die Höhe einer sogenannten *Kugelkalotte* bestimmt. Einer Formelsammlung entnehmen wir $O = 2r_E\pi h_1$ für ihre Oberfläche, was einen Anteil von

$$p = \frac{2r_E\pi h_1}{4\pi {r_E}^2} = \frac{h_1}{2r_E} = \frac{380}{2 \cdot 6370} \approx 3\%$$

an der gesamten Erdoberfläche mit sich bringt.

Algebraische Umformungen helfen, eine allgemeine Beziehung zwischen dem Anteil p und der Flughöhe h zu erkennen:

$$\begin{aligned} p &= \frac{h_1}{2r_E} = \frac{q-h}{2r_E} = \frac{\frac{x^2}{h+r_E}-h}{2r_E} = \frac{\frac{(r_E+h)^2-{r_E}^2}{h+r_E}-h}{2r_E} = \\ &= \frac{1}{2r_E}\left(\frac{2r_Eh+h^2}{h+r_E}-h\right) = \frac{1}{2r_E}\cdot\frac{2r_Eh+h^2-h^2-hr_E}{h+r_E} = \\ &= \frac{1}{2r_E}\cdot\frac{r_Eh}{h+r_E} = \frac{h}{2(r_E+h)} = p(h)\ . \end{aligned}$$

In der sechsten Klasse (zehnte Schulstufe) kann der *Grenzwert* $\lim_{h\to\infty} p(h) = \frac{1}{2}$ berechnet werden. Das heißt für große Höhen nähert sich der vom Satelliten erreichbare Anteil der Erdoberfläche 0,5. Gleichzeitig wächst allerdings eben die Entfernung des Satelliten von der Erde (ins Unendliche).

Die benutzte Formel für die Oberfläche einer Kugelkalotte schließlich kann in der achten Klasse begründet bzw. hergeleitet werden. In Abbildung 5 rotiert der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (Viertelkreis) um die x-Achse.

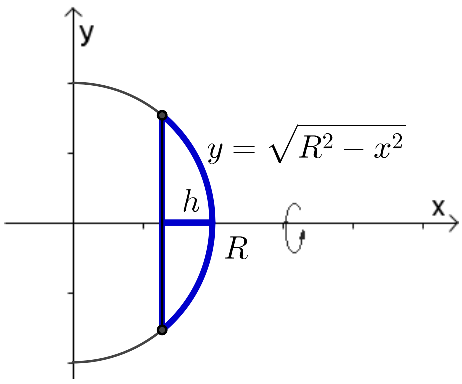


Abbildung 5: Zur Berechnung der Oberfläche einer Kugelkalotte

Die erste Ableitung f' von f lautet $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Damit können wir die Mantelfläche M des Rotationskörpers gemäß $M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ (ebenfalls aus der Formelsammlung) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \\ &= 2\pi \int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi \int_{R-h}^{R} R\, dx = \\ &= 2\pi \cdot Rx \Big|_{R-h}^{R} = 2\pi[R^2 - R(R-h)] = 2\pi Rh\ . \end{aligned}$$

Das ist ein schönes Beispiel für das Spiralprinzip (Abbildung 6). Es bedeutet, eine bestimmte Thematik immer wieder im Laufe des Mathematikunterrichts — auch über die verschiedenen Klassenstufen hinweg — auf steigendem Niveau aufzunehmen. Hier sind die eingesetzten Methoden immer ausgefeilter (nicht unbedingt schwieriger) geworden.

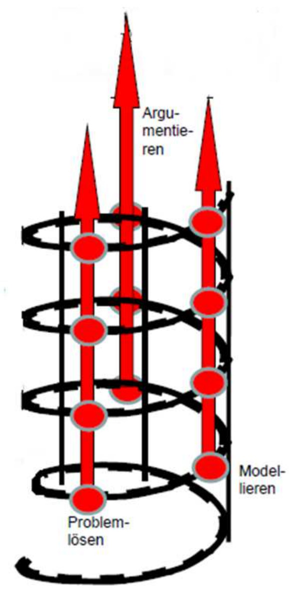


Abbildung 6: Das Spiralprinzip, hier anhand von Handlungsbereichen

Schließlich soll die Mathematik als *Denktechnologie* von den Schülern und Schülerinnen gesehen werden, als spezifische Art, Probleme zu lösen. Stellen wir uns zum Beispiel einen Würfel mit Seitenlänge a vor, auf dessen einer Ecke eine Fliege sitzt und auf der genau schräg diagonal gegenüber liegenden Ecke eine Spinne (Abbildung 7). Wie kommt die Spinne am schnellsten, das heißt hier am kürzesten Weg zur Fliege, wenn das Innere des Würfels tabu ist?

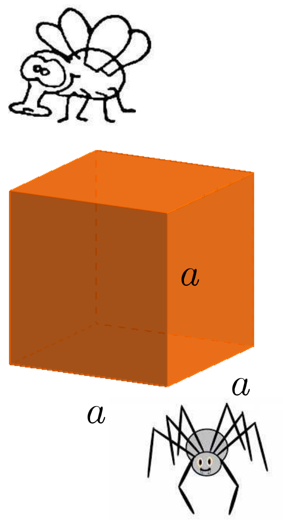


Abbildung 7: Wie kommt die Spinne am kürzesten Weg zur Fliege?

Zur *Lösungsfindung* sehen wir uns das Problem in der *Ebene* an (das ist hier die entscheidende Idee!): Abbildung 8. Zur Orientierungshilfe für die Spinne berechnen wir $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$ und schließlich $\frac{x}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, was uns zu $x = \frac{a}{2}$ führt. Die Spinne muss also den Mittelpunkt der (einer) ihr gegenüberliegenden Kante ansteuern, wenn sie den kürzesten Weg nehmen möchte (nochmals Abbildung 8).

Eine *Musteraufgabe zur Lebensvorbereitung* aus dem Bildungsstandardskonzept M8 sei zum Schluss hier noch angegeben ([5], S. 25): *Ein Kapital von € 8500,– wird mit 3,5% jährlich verzinst. Berechne die Zinsen für ein Jahr!*

Die in den Bildungsstandards M8 als Ziel angeführte *Anschlussfähigkeit* hat den Besuch der Schüler und Schülerinnen von weiterführenden Schulen im Blick, aber auch eine eventuelle Berufsausbildung nach acht Jahren Schule. Sie betont die Grundlage für eine vertiefende und erweiterte mathemati-

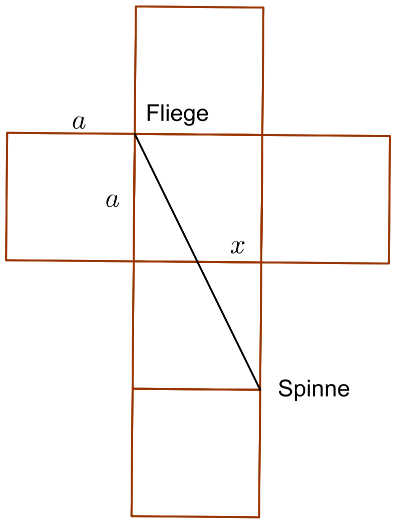


Abbildung 8: Das Problem eben ausgebreitet

sche Ausbildung, die über Alltagserfordernisse hinausgeht. Dies führt zu einer deutlicheren Explizierung (inner-)mathematischer Zusammenhänge und Strukturen. Eine *Musteraufgabe* soll diese Funktion erhellen: *Max erhält um fünf Euro mehr Taschengeld als Franz. Stelle dies durch eine Gleichung dar, in der du die folgenden Variablen verwendest:*

$m\ldots$ *Taschengeldbetrag in Euro, den Max erhält*

$f\ldots$ *Taschengeldbetrag in Euro, den Franz erhält*

([5], S. 45).

Diese Intention bringt eine Betonung spezifisch *mathematischer Tätigkeiten* mit sich.

1. *Begründen*

   z. B.: Claudia findet in einem Schulbuch folgende Grafik eines Trapezes $ABCD$: Abbildung 9. Darunter wird eine Formel für den Flächeninhalt des Trapezes angegeben:

$$A = c \cdot h + \frac{(a-c) \cdot h}{2}$$

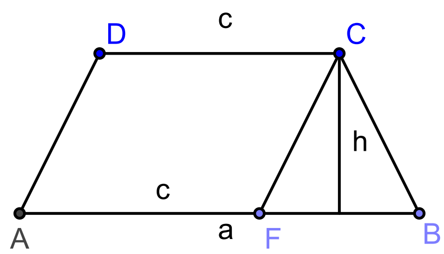


Abbildung 9: Ein (gleichschenkeliges) Trapez $ABCD$

Erkläre die angegebene Flächeninhaltsformel ([5], S. 91)!

2. *Interpretieren*

   z. B.: Vier Freunde essen in einem Restaurant. Die Rechnung in der Höhe von Euro 80,– teilen sie untereinander auf. Max, der älteste der vier Freunde, bezahlt $20 + 60 : 4 = 35$ Euro, die anderen drei teilen den Rest gleichmäßig untereinander auf. Erfinde eine Geschichte, die zu dieser Aufteilung der Rechnung passt ([5], S. 33)!

3. *Darstellen, Modellbilden*

   z. B.: Bildungsstand der ÖsterreicherInnen 2012 (15 Jahre und älter, höchste abgeschlossene Ausbildung, Quelle: Statistik Austria)

Pflichtschule	28%
Lehre	32%
BMS	14%
AHS, BHS, Kolleg	14%
Uni, Hochschule	12%

   Stelle diese Verteilung in einem Streifendiagramm dar: Abbildung 10 (vgl. [5], S. 97).

1.2 Inhalte des Mathematikunterrichts definieren und erklären

Drei *Grunderfahrungen* nach Heinrich Winter soll der Mathematikunterricht ansprechen (vgl. [9], S. 37):

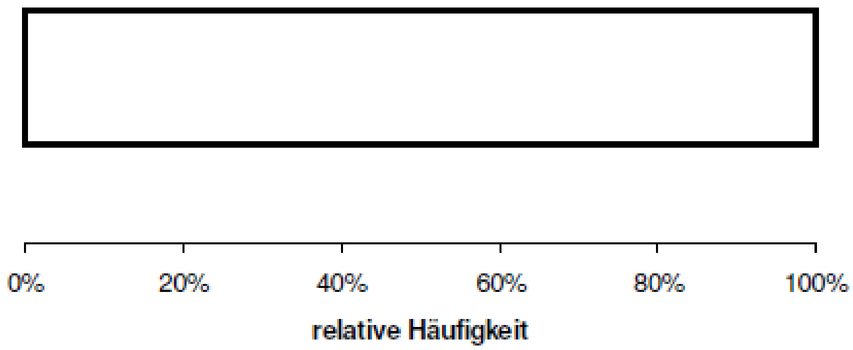


Abbildung 10: Ein Streifendiagramm

G1 Erscheinungen der Welt um uns, [...], aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art [...] zu verstehen.

z. B. siehe i) Wirtschaftsbeispiel und ii) Satellitenbeispiel aus 1.1.

G2 mathematische Gegenstände [...] als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt [...] begreifen

z. B.: $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ ist zu begründen, wobei wir unter $\sqrt{5}$ jene nichtnegative reelle Zahl verstehen, die zum Quadrat 5 ergibt.

Denn angenommen $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann wäre $5 = \frac{a^2}{b^2}$ bzw. $5b^2 = a^2$, und das geht nicht: in $5b^2$ kommt der Primfaktor 5 in ungerader Anzahl vor (also einmal, oder dreimal, oder fünfmal, oder ...), in a^2 dagegen in gerader Anzahl (also gar nicht, oder zweimal, oder viermal, oder ...). Das ist ein Widerspruch zur *Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.*

Wir *deuten* dieses Resultat dahingehend, dass das Konzept der Bruchzahlen (i. e. Quotienten ganzer Zahlen) nicht zu (manchen) Wurzelzahlen passt. Als *Konsequenz* daraus erkennen wir, dass der Zahlenstrahl Lücken hat, solange er nur rationale Zahlen enthält. *Genauer* gesagt hat er sogar überabzählbar viele Lücken, das sind viel mehr als es „dichte Stellen “ gibt: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$ („Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind mächtiger als die rationalen $\mathbb{Q}$“).

G3 [...] Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, [...] zu erwerben.

z. B. Spinne – Fliege aus 1.1

Als konkrete Konsequenz (nicht nur daraus) sind für die Bildungsstandards M8 folgende vier Inhaltsbereiche formuliert worden ([5], S. 13):

1. Zahlen und Maße
2. Variable, funktionale Abhängigkeiten
3. Geometrische Figuren und Körper
4. Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an AHS sind ebenfalls vier Inhaltsbereiche festgelegt worden ([2], S. 5):

1. Algebra und Geometrie
2. Funktionale Abhängigkeiten
3. Analysis
4. Wahrscheinlichkeit und Statistik

1.3 Entwicklung mathematischer Lernsequenzen

Für die konkrete Unterrichtsplanung bietet sich die *genetische Methode* an, die im Folgenden näher charakterisiert werden soll (vgl. [10], S. 131). Sie zeichnet sich nämlich durch eine(n)

- Anschluss an das Vorverständnis der SchülerInnen,
- Einbettung des in Rede stehenden Themas in größere inner- oder außermathematische Kontexte,
- informelle Einführung von Begriffen, die aus dem Kontext ableitbar sind,

- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
- durchgehende Motivation und keine (gedanklichen) Sprünge,
- Erweiterung des Gesichtskreises, Verlagerung der Standpunkte

aus.

Für die *praktische Realisierung im Unterricht* werden nun sechs Unterpunkte angegeben (vgl. [10], S. 148 ff.) und durch Beispiele näher beschrieben.

1.3.1 Auswahl beziehungshaltiger Mathematik

Beziehungshaltige Mathematik erreicht man durch eine Verknüpfung mit der erlebten Wirklichkeit der Lernenden. Ziehen wir z. B. das Lottospiel „6 aus 45" heran. Für das Auftreten der einzelnen (Gewinn-)Zahlen von 1 bis 45 bei den bisher durchgeführten Ziehungen gibt es Statistiken: Abbildung 11. Die absolute Häufigkeit X des Auftretens einer bestimmten Zahl (z. B. 17) ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei n die Anzahl der Ziehungen meint und p die Wahrscheinlichkeit für das Gezogenwerden von z. B. „17" bei einer Ziehung. Aus Abbildung 11 lesen wir $n = 2364$ ab. Für die Ziehungswahrscheinlichkeit p berechnen wir entweder mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung

$$p = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{44}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{44!}{5! \cdot 39!} \cdot \frac{6! \cdot 39!}{45!} = \frac{6}{45} \ ,$$

oder einfach so:

$$\frac{1}{45} + \frac{44}{45} \cdot \frac{1}{44} + \cdots + \frac{1}{45} = \frac{6}{45} \ .$$

Aus der Formelsammlung entnehmen wir die Formel für den γ-*Streu- oder* γ-*Schätzbereich* für binomialverteilte absolute Häufigkeiten X:

$$\mathrm{P}\left(|X - np| \leq z\sqrt{np(1-p)}\right) = \gamma \approx 2\Phi(z) - 1 \ ,$$

dabei ist γ die zu wählende Sicherheitswahrscheinlichkeit und z ist durch die letzte Näherung festgelegt. Wir erhalten z. B. für $\gamma = 0,95$ die Gleichung

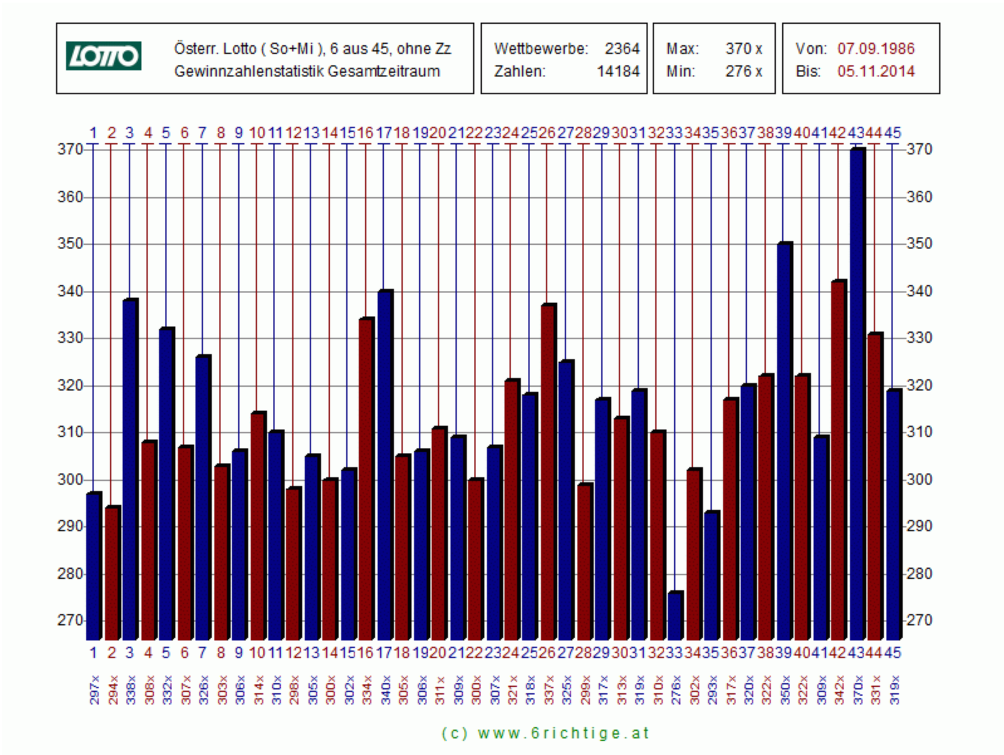


Abbildung 11: Absolute Häufigkeiten des Auftretens von Lottozahlen

$\Phi(z) = \frac{1+\gamma}{2}$, woraus wir $z \approx 1,96$ einer Normalverteilungstabelle entnehmen. Jetzt ist alles bereit zur Berechnung des Schätzbereichs:

$$\begin{aligned} z \cdot \sqrt{np(1-p)} &= 1,96 \cdot \sqrt{2364 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{39}{45}} = 32,39\ldots \\ np &= 2364 \cdot \frac{6}{45} = 315,2\ . \end{aligned}$$

Der 0,95-Streubereich ist dann also „nach außen“ gerundet $[282, 348]$. Wir konstatieren damit in Abbildung 11 drei Ausreißer: 33, 39 und 43. Wählen wir $\gamma = 0,99$, erhöhen wir also die Sicherheitswahrscheinlichkeit, dann ist $[272, 358]$ der 0,99-Schätzbereich, und es bleibt ein Ausreißer übrig: 43.

1.3.2 Eingehen auf das Vorverständnis der SchülerInnen

Um das Vorverständnis der Lernenden zu ergründen und darauf einzugehen, sind Antworten auf die folgenden Leitfragen von den Lehrenden zu suchen:

- Welche Vorerfahrungen bringen die SchülerInnen mit?
- Wie ist ein bestimmtes Ziel mit den Mitteln der SchülerInnen zu erreichen?
- Bringt ein bestimmtes Problem genügend Ansatzpunkte für die SchülerInnen?

Gleichzeitig bedarf es einer Distanzierung der Lehrenden von den eigenen Gewohnheiten, um dieses Eingehen dann auch tatsächlich zu realisieren. Es spielt also die Haltung der Lehrenden hier ebenso eine Rolle.

Um sich ein Bild von den (kognitiven) Voraussetzungen der SchülerInnen zu einem bestimmten Thema zu machen, sind sogenannte *„mind maps"* geeignet. Diese kreative Denk- und Schreibtechnik wurde 1976 vom englischen Mathematiker, Psychologen und Hirnforscher TONY BUZAN erstmalig vorgestellt, sie dient zur individuellen Darstellung von logischen kognitiven Zusammenhängen. Ihre Ausformung trägt der Tatsache Rechnung, dass Assoziationen und Strukturbildungen im Allgemeinen *nicht* linear ablaufen. Ein Beispiel zeigt Abbildung 12[3]. Man sieht, die Assoziationen beginnen abstrakt und werden immer konkreter. Lehrenden gelingt es auf diese Weise, den jeweiligen individuellen Entwicklungsstand eines Schülers / einer Schülerin festzustellen (vgl. [1]).

An Beispielen führen wir zuerst die unmittelbar einsichtige Symmetrie bei manchen (deswegen entsprechend populären) Zufallsgeneratoren an. Münzen und Würfel suggerieren aufgrund ihrer Form (Symmetrie!) Wahrscheinlichkeiten von $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{6}$. Hier kann sich der Lehrer / die Lehrerin im Allgemeinen auf elementares Vorwissen der SchülerInnen stützen.

Aus der Lebenswelt der SchülerInnen stammt die Idee, Handy-Tarife zu vergleichen. Die zwei Tarife in Abbildung 13 sind typisch für die konkurrenzierenden Angebote der letzten Jahre.

[3] `http://www.math-edu.de/Vernetzungsdiagramme/Diagramme-Parabeln.html`

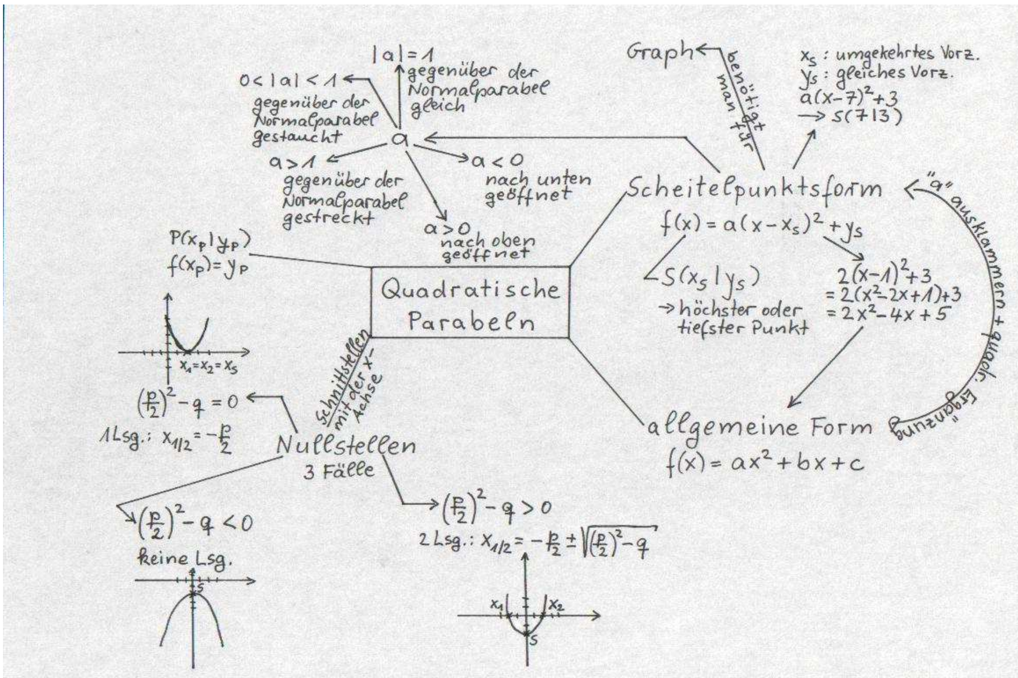


Abbildung 12: Ein Mind Map zu quadratischen Parabeln

Entgegen dem Eindruck, den man aus dem real existierenden Mathematikunterricht bekommen könnte, sind Extremwertaufgaben manchmal auch ohne Verwendung des Differentialrechnungskalküls lösbar. Solche Beispiele können die Idee des Optimierens schon in unteren Jahrgangsstufen des Mathematikunterrichts demonstrieren, lange bevor sie als bloße Anwendung der Differentialrechnung degradiert wird. Eine sehr bekannte Optimierungsaufgabe ist die Suche nach dem flächengrößten Rechteck bei vorgegebenem Umfang u. Die eigentlich zweistellige Funktion $A = A(a, b) = ab$ für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b kann mittels $b = \frac{u}{2} - a$ auf eine einstellige zurückgeführt werden: $A(a) = a \cdot \left(\frac{u}{2} - a\right)$. Diese ist nun dem Differentialrechnungskalkül der Schule zuführbar: $A'(a) = \frac{u}{2} - 2a$. Nullsetzen liefert das bekannte Resultat $a = \frac{u}{4}$ und somit auch $b = \frac{u}{4} = a$. Das flächengrößte Rechteck unter allen Rechtecken mit Umfang u ist also das Quadrat mit Seitenlänge $\frac{u}{4}$.

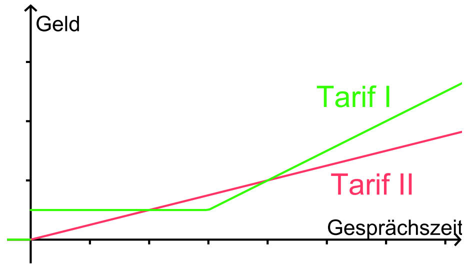


Abbildung 13: Zwei unterschiedliche Handytarife

Ganz anders ist der Zugang mithilfe einer nützlichen Ungleichung, der sogenannten *Mittelungleichung*. Sie lautet

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Gleichheit findet man genau dann, wenn $a = b$ ist. Wenn wir nun festhalten, dass der halbe Umfang $a + b$ konstant ist in der in Rede stehenden Aufgabe, dann können wir schließen, dass das Produkt ab maximal wird, wenn die Faktoren gleich sind: $a = b$. Und so landen wir wieder — wenn auch auf ganz anderem Wege — beim Quadrat.

Die Mittelungleichung kann ganz einfach gezeigt werden: wenn wir sie quadrieren, sehen wir $4ab \leq (a + b)^2$, was sich zu $0 \leq (a - b)^2$ umformen lässt. Lesen wir die einzelnen Umformungsschritte in *umgekehrter* Reihenfolge, dann steht eine Begründung der Mittelungleichung da.

Es geht hier nicht nur um die Wahl von altersadäquaten Mitteln und Methoden, sondern auch um das Prüfen der Kompatibilität der intendierten Vorgangsweise inklusive der dafür notwendigen Werkzeuge mit dem vorhandenen Vorverständnis der SchülerInnen.

1.3.3 Konstruktion von Problemkontexten

Zur unterrichtlichen Fassung von mathematischen Themen gehört auch ihre Rahmung in Form von Problemkontexten, die typische Anwendungssituationen derselben zeigen und darüber hinaus weiterführende Hinweise enthalten. Sie können beispielsweise in der Mathematik selbst, in Technik / Naturwissenschaften, im Alltag oder aber auch in der Geschichte gefunden werden. Als historisch bedeutsam kann exemplarisch die Frage nach der Bewertung von Chancen beim Glücksspiel erörtert werden. Ihre Beantwortung stellt eine der Grundlagen für den (klassischen) Wahrscheinlichkeitsbegriff dar. Stellen wir uns vor, zwei Personen A und B spielen ein (faires) Glücksspiel, sie machen sich aus, gewonnen hätte jene/r, der/die zuerst fünf Spiele für sich entscheiden kann. Beim Stand von 4:3 muss das Spiel plötzlich abgebrochen werden (*„Force majeure“*, höhere Gewalt, die Problemstellung und ihre Bearbeitung stammen aus dem 17. Jahrhundert, denken wir also etwa an eine Kriegserklärung, die jäh überbracht wird). Die Frage, die u. a. an PASCAL gestellt worden ist, lautet nun: „Wie ist der Einsatz gerechterweise aufzuteilen?“ In einem Briefwechsel mit FERMAT 1654 äußert Pascal folgenden Vorschlag zur Aufteilung: Person A, die schon vier Spiele gewonnen hat, gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auch das nächste, achte Spiel, und hätte dann auch insgesamt gewonnen. Es gibt aber darüber hinaus noch zwei andere Möglichkeiten: zum einen könnte A das achte Spiel verlieren und das darauffolgende gewinnen. Wieder hätte A den Gesamtsieg errungen, diesmal allerdings mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, diese ist also nur halb so groß wie die erst genannte. Es bleibt zum anderen die Möglichkeit, dass B die nächsten zwei Spiele gewinnt und so mit 5:4 die Sache für sich entscheidet. Dies passiert wieder mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Entscheidend ist nun, dass Pascal diese Bewertung der Möglichkeiten mit Hilfe von (Gewinn-)Wahrscheinlichkeiten vornimmt und nicht bloß die Varianten zählt. Daraus resultiert ein Aufteilungsschlüssel von 3:1, denn A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ und B daher mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

1.3.4 Kontinuierlicher Anschluss weiterer Fragestellungen

Mit dem Spiralprinzip sprechen wir vor allem langfristige Lernunternehmungen an. Das wiederholte Aufgreifen bestimmter Thematiken oder Methoden auf steigendem Niveau kann Jahre beanspruchen. Hier geht es nun (auch) um unmittelbare Fortsetzungen, Querverbindungen etc. Dies kann zum Beispiel durch betontes *in Kontrast Setzen* zweier Begriffe, Objekte oder Bedeutungen geschehen. Die Gleichung $ax + by = c$ beschreibt im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, im $\mathbb{R}^3$ dagegen eine Ebene (parallel zur z-Achse).

Eine weitere Möglichkeit ist, ein Thema *in Beziehung zu anderen Themen* zu setzen. Überraschende Querverbindungen können so der Aufmerksamkeit der SchülerInnen nahe gebracht werden. Betrachten wir zum Beispiel eine Aufgabe aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Es werden n Preise auf n Personen durch Losentscheid Stück für Stück aufgeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person *keinen* Preis erhält? — Diese Wahrscheinlichkeit kann mit dem Ansatz „günstige durch mögliche“ berechnet werden: „günstig“ wären dann $n-1$ Personen (jede außer die bestimmte), möglich natürlich alle n Personen. Pro Losentscheid ist also die Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass jene Person den in Rede stehenden Preis nicht gewinnt (bzw. $\frac{1}{n}$, dass sie ihn gewinnt). Für n Preise ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_n dann $p_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Für eine große Anzahl n von Preisen bzw. Personen nähert sich diese Wahrscheinlichkeit p_n dem Wert $\frac{1}{e}$, wie die *Analysis* lehrt. Dort ist nicht von Wahrscheinlichkeiten die Rede, sondern von reellen Folgen und ihrer Konvergenz.

Neue Anwendungssituationen aufzeigen kann ebenfalls eine Anschlussmöglichkeit darstellen. Denken wir z. B. an das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, welches üblicherweise als (orientierter) Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer (in der Schule meist stetigen) Funktion f und der x-Achse zwischen den Grenzen a und b interpretiert wird. Sehr oft allerdings ist seine Deutung als kumulative Größe gefragt. Klassisches Beispiel hiezu ist die (Standard-) Normalverteilung: Abbildung 14. Über die Dichtefunktion f wird integriert

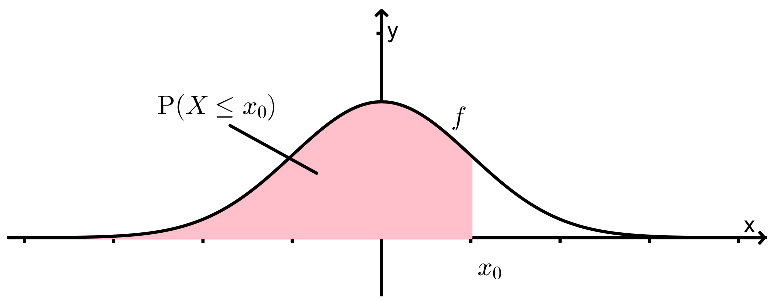
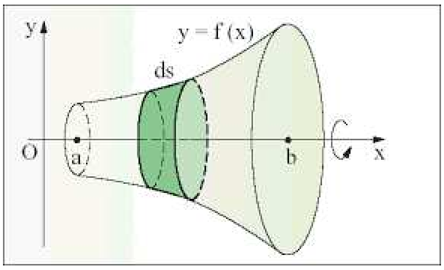


Abbildung 14: Bestimmtes Integral als kumulative Größe

und der Flächeninhalt als kumulative Größe bekommt eine neue Bedeutung als Wahrscheinlichkeit.

Die *Anbahnung neuer Ideen, Inhalte* etc. kann oft unmittelbar an Bekanntes anschließen. Die Idee zum Beispiel, das Volumen eines Rotationskörpers durch das Aufaddieren der Rauminhalte „kleiner Scheibchen“ anzunähern und im Grenzwert exakt zu bestimmen, kann auf die Berechnung der Mantelfläche eines Rotationskörpers übertragen werden: Abbildung 15[4].



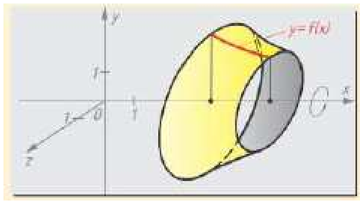


Abbildung 15: Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers

1.3.5 Standpunktverlagerungen

Dieser Aspekt der genetischen Methode bezieht sich auf die Trennung zwischen Sachebene und Entwurfebene, die eine *distanzierte Rationalität* nach sich zieht ([10], S. 140 f.). Dementsprechend ist zwischen Wirklichkeit (Realität) und Mathematik zu unterscheiden. Anstöße zur Weiterentwicklung bezieht die Mathematik sowohl aus sich selbst als auch aus der Realität, sodass sich daraus ergebende Standpunktwechsel auch im Mathematikunterricht ihren Platz haben sollten.

Folgende Standpunkte sind dabei möglich, weil sie durch spezifische Tätigkeiten im Unterricht charakterisiert werden können.

(1) Die *Entwicklung inhaltlicher Mathematik* forciert eine intuitive Vorgangsweise, die vorwiegend auf konkrete Beispiele aufbaut. Ihre Analyse und die Lösung anschaulicher Probleme aus der Mathematik oder der Wirklichkeit führen zu einer Erweiterung der kognitiven Struktur der Lernenden. Dabei wird ein reichhaltiges und substanzielles Arsenal von Methoden, Kenntnissen, Verfahren etc. aufgebaut. Zum Beispiel

[4] `http://www.nb-braun.de/mathematik/Drehkoerper/bausteine/bst3-2.htm` und Mathematik 8, herausgegeben von S. Götz und H.-C. Reichel, von R. Müller und G. Hanisch, öbv, Wien 2013, S. 102

kann die Grundidee des NEWTON'schen Näherungsverfahrens zum Finden von Nullstellen differenzierbarer Funktionen f anschaulich mit Hilfe von Abbildung 16[5] motiviert werden: das Approximieren des Graphen von f durch Tangenten an ihn. Die Nullstellen dieser Tangenten nähern sich (unter gewissen Voraussetzungen) einer Nullstelle von f. Die (rekursive) Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ liefert eine Folge von

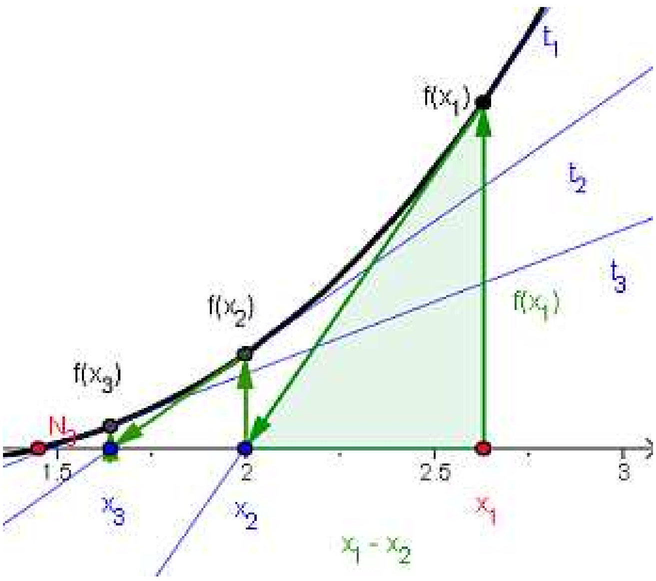


Abbildung 16: Das Newton'sche Näherungsverfahren

Näherungswerten für die gesuchte(n) Nullstelle(n) von f. Unter welchen Bedingungen findet die in Abbildung 16 angedeutete Konvergenz aber tatsächlich statt? Oder anders gefragt: kann dieses Verfahren auch schief gehen?

(2) Zur Beantwortung dieser Frage und natürlich auch anderer, ähnlich gelagerter, muss ein Standpunktwechsel vorgenommen werden. Die Betrachtung der ursprünglichen Probleme (aus der Mathematik selbst oder aus der Realität entnommen) tritt in den Hintergrund, die dabei verwendeten Verfahren zum Beispiel werden nun für sich genauer

[5] `http://home.eduhi.at/teacher/alindner/Dyn_Geometrie/DiffInt/Herleitung NewtonNaeherung.htm`

unter die Lupe genommen. Diese *begrifflich-strukturelle Analyse* erfordert eine Distanzgewinnung zum Konkreten. Es geht nun nicht mehr um die Gewinnung einer Lösung oder genereller um die Einsicht in ein gewisses Problem, sondern es wird versucht, eine Verallgemeinerung oder eine Abstraktion der anschaulich motivierten Verfahren zu erzielen. Auf diese Weise soll es zu einer gewissen Übersicht über die in Rede stehenden Themen kommen.

Ein Beispiel dazu ist die *Exaktifizierung des Grenzwertbegriffes* bei reellen Folgen in der sechsten Klasse AHS (zehnte Schulstufe). Sie dient dazu, noch auf der selben Jahrgangsstufe den Begriff des „Funktionsgrenzwerts" einzuführen, und ermöglicht damit den SchülerInnen, eine wichtige Eigenschaft von Funktionen, die Stetigkeit, kennenzulernen. Eine Jahrgangsstufe höher ist dann der Differentialquotient eine weitere Ausformung dieser Exaktifizierung. In der zwölften Jahrgangsstufe schließlich (achte Klasse AHS) wird das bestimmte Integral als gemeinsamer Grenzwert von Ober- und Untersummen definiert oder interpretiert: Abbildung 17. Eine Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls, auf dem Ober- und Untersummen einer Funktion f (in der Schule meist stetig) gebildet werden, führt zu einer Folge von Werten für die Ober- bzw. Untersummen, deren Grenzwert(e) dann betrachtet wird (werden).

1.3.6 Förderung kognitiver Strategien

Kognitive Strategien sind

- eine echte Teilmenge *allgemeiner Lernziele,* wie sie Bigalke 1976 formuliert hat (nach [10], S. 47):

  1. wissenschaftliches Denken und Arbeiten
  2. logisches Denken
  3. Argumentieren, Kritisieren und Urteilen
  4. geistige Initiativen, Phantasie und Kreativität
  5. Anschauungsvermögen
  6. sprachliche Ausdrucksfähigkeit
  7. Anwenden von Mathematik

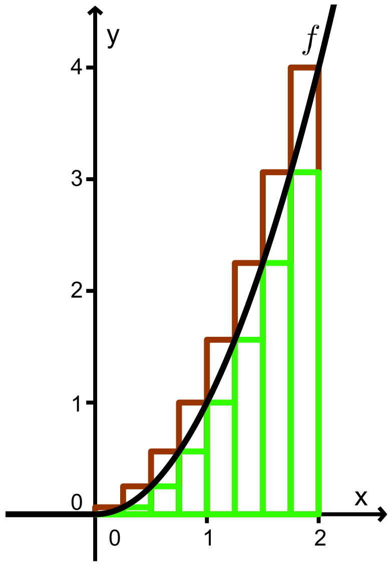


Abbildung 17: Ober- und Untersumme bei der Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+\colon y = x^2$ im Intervall $[0,2]$

- und müssen auf der Basis solider Kenntnisse und geistiger Techniken (damit ist der wichtige Bereich des *Übens* gemeint) aufgebaut und weiterentwickelt werden.

Sie können auf verschiedene Weise initiiert und gefördert werden, einige Möglichkeiten werden im Folgenden beispielhaft beschrieben.

(1) *entdeckendes Lernen* ([8])

Zum Beispiel führt die *Konstruktion von Primzahlen* nach dem Euklid'schen Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen (siehe zum Beispiel [8], S. 22) zu einer interessanten Entdeckung, deren schrittweise Entfaltung teilweise auch von den SchülerInnen selbstständig vorangetrieben werden kann.

Wir übernehmen die entscheidende Beweisidee von Euklid, nämlich Zahlen der Bauart $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n\ (+1)$ zu betrachten. Dabei sind die $p_i\ (i = 1, \dots, n)$ Primzahlen. *Primzahlen* sind natürliche Zahlen größer als eins, die nur durch sich selbst und durch eins teilbar sind, also genau zwei Teiler besitzen. Wenn wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 6 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 &= 30 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 &= 210 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 &= 2310 \end{aligned}$$

ausrechnen, und jeweils eins addieren, dann landen wir bei 7, 31, 211, 2311, das sind alles Primzahlen. Typischerweise (für die Mathematik!) drängt sich nun die Frage auf: geht das immer? Die Antwort ist (leider) NEIN, denn schon $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ ist keine Primzahl mehr. ABER sowohl 59 als auch 509 sind Primzahlen, und zwar solche, die wir noch nicht hatten, also ungleich 2, 3, 5, 7, 11 und 13 sind.

Weitere Beispiele dieser Art lassen uns die Vermutung (die *Entdeckung*) aussprechen: Seien a, b, c Primzahlen. Dann ist entweder $a \cdot b \cdot c + 1$ Primzahl oder es gibt einen Teiler g von $a \cdot b \cdot c + 1$, kurz $g \mid a \cdot b \cdot c + 1$, der ungleich a, b, c ist und außerdem Primzahl ist (vgl. [8], S. 23).

Eine *Folgerung* daraus ist, dass die Menge der Primzahlen offenbar nicht endlich ist, denn zu einer beliebigen Menge P von Primzahlen kann immer eine neue konstruiert werden, die also nicht Element von P ist.

Hier besitzt die Menge drei Elemente: $P = \{a, b, c\}$. Es folgt eine *Begründung* für die Existenz von g:

(i) $g = a \cdot b \cdot c + 1$ ist bereits Primzahl. Dann sind wir fertig, denn $g \neq a$, $g \neq b$ und $g \neq c$ muss gelten, weil $g > a$, $g > b$ und $g > c$.

(ii) Die Zahl $a \cdot b \cdot c + 1$ ist keine Primzahl. Dann gibt es eine Primzahl g, die $a \cdot b \cdot c + 1$ teilt: $g \mid a \cdot b \cdot c + 1$. Wäre jetzt zum Beispiel $g = a$, dann würde g wegen $g \mid a \cdot b \cdot c$ auch die Differenz $(a \cdot b \cdot c + 1) - a \cdot b \cdot c = 1$ teilen. Das kann aber nicht sein! Also muss $g \neq a$ gelten. Und genauso ist $g = b$ oder $g = c$ unmöglich.

(2) *divergentes Denken*

Die Förderung des divergenten Denkens bei SchülerInnen stellt für die Lehrenden eine große Herausforderung (im Mathematikunterricht) dar.

Es kann sich als äußerst schwierig herausstellen, vom Mainstream abweichende SchülerInnenmeldungen, -vermutungen, -behauptungen etc. in kurzer Zeit dahingehend zu analysieren, ob sie ausbaufähig und -würdig sind. Ein paar Stichworte dennoch dazu:

- unkonventionelle Ideen fördern
- SchülerInnenfehler ermutigend entschärfen
- Ideen provozieren: „brainstorming“

(3) *automatisiertes Denken stören*

Dieser Zugang soll an zwei Beispielen in ganz unterschiedlichen Klassenstufen demonstriert werden. Schon in der ersten Klasse (A)HS bzw. NMS (fünfte Schulstufe) können zum Thema „Quader“ die SchülerInnen folgendermaßen provoziert oder verunsichert (d. h. zum Nachdenken angeregt) werden: „Ein Quader hat 6 Begrenzungsflächen, jede hat 4 Kanten, also hat ein Quader insgesamt $6 \cdot 4 = 24$ Kanten?!“

In der achten Klasse AHS (zwölfte Schulstufe) kann das wenig aufregende Kapitel „Integrationsmethoden“ ein bisschen aufgewühlt werden. Wir integrieren dazu die Funktion f mit $f(x) = \sin 2x$ auf zwei Arten:

(i) $\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x + c$

(ii) $\int \sin 2x \, dx = \int \sin t \, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-\cos t) + c' = -\frac{1}{2} \cos 2x + c'$, dabei ist $2x = t$ substituiert worden.

Wie sind diese beiden sich (stark?) unterscheidenden Ergebnisse zu erklären?

(4) *offene Probleme stellen*

Wieder wollen wir anhand zweier ganz unterschiedlicher Beispiele offene Probleme paradigmatisch charakterisieren. Die *erste Aufgabe* hat einen außermathematischen Kontext: „Welches ist die günstigste Möglichkeit, am 9.2.2015 von Wien nach Basel zu reisen?“ Es wird weder gesagt, was unter „günstigst“ zu verstehen ist, es kann der schnellste Weg, also zeitlich am kürzesten gemeint sein, oder aber die energetisch am wenigsten aufwändige Methode, oder der örtlich kürzeste Weg, oder ..., noch ob Wien in Österreich oder in Wisconsin[6] (sehr unwahrscheinlich)

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Wien,_Wisconsin`

gemeint ist. Es müssen also zusätzliche Annahmen getroffen werden, bevor das (eben offene) Problem angegangen werden kann.

Die *zweite Aufgabe* ist eine innermathematische. Das Thema „Geraden und Kreis“ kann zu sehr vielen verschiedenen Ausarbeitungen führen. Bekannt ist zum Beispiel der Peripheriewinkelsatz aus der vierten Klasse (achte Schulstufe), weniger verbreitet der Sehnen-Tangenten-Satz: Abbildung 18 links bzw. rechts. Zusammenhänge wie $ST^2 = SP_1 \cdot SP_2$ und ihre Begründungen öffnen ein weites („offenes“) Feld.

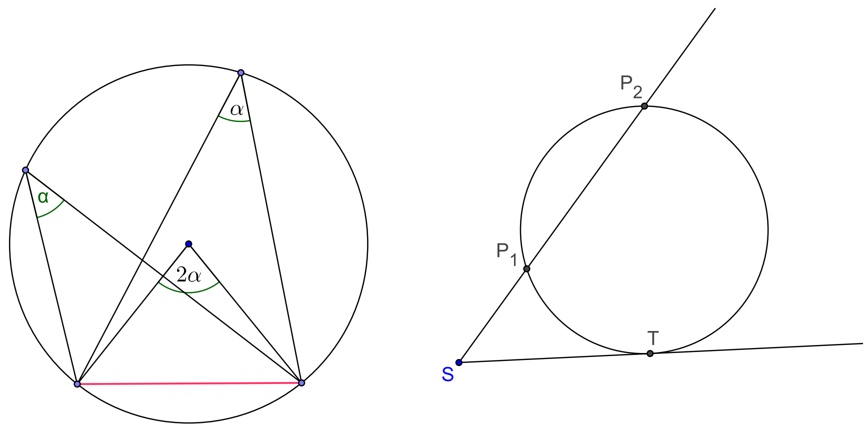


Abbildung 18: Der Peripheriewinkelsatz und der Sehnen-Tangenten-Satz

(5) *Problemlösestrategien lehren*

Im 20. Jahrhundert hat sich G. Pólya intensiv mit Problemlösestrategien beschäftigt. In der didaktischen Literatur sind daraus vier Schritte in einem Problemlöseprozess abgeleitet worden ([6], S. 99 f.):

(a) Problem verstehen

(b) Plan entwickeln

(c) Plan durchführen

(d) Ergebnis interpretieren, Methode reflektieren

An konkreten Strategien wollen wir hier

- Extremfälle betrachten,
- analoge Probleme heranziehen und
- konkrete Beispiele finden

nennen.

2 Fachdidaktische Konzepte

2.1 Fundamentale Ideen

Sie dienen zum Ordnen des Unterrichts nach fachlichen Kriterien (J. S. Bruner, 1960). So entsteht ein roter Faden, an den das *Spiralprinzip* (Abbildung 6) anknüpft. Welche Vorschläge für fundamentale Ideen gibt es nun? Ein paar sollen im Folgenden genannt und exemplarisch beschrieben werden (nach [6], S. 38 f.).

(i) *Algorithmus:* eine Prozedur zur Berechnung und / oder Entscheidung. Zum Beispiel dient der *Divisionsalgorithmus* zur Berechnung des Quotienten zweier natürlicher Zahlen und zeigt dabei („entscheidet“ quasi), ob eine periodische oder endliche Dezimalzahl als Ergebnis vorliegt. Oder ein Spezialfall des *Newton'schen Näherungsverfahrens* zum näherungsweisen Auffinden von Nullstellen reeller Funktionen (Abbildung 16) ist das sogenannte Heron'sche Verfahren zur Berechnung von (Quadrat-)Wurzeln: Abbildung 19. Um eine Folge von flächengleichen

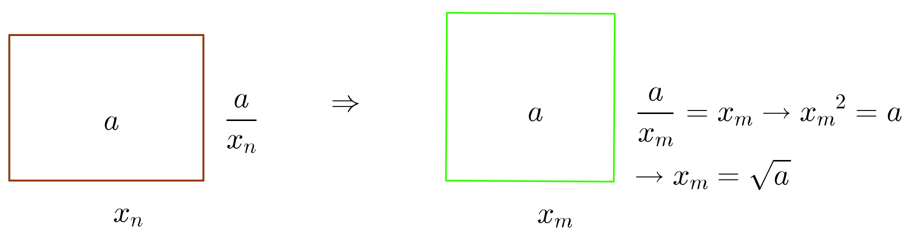


Abbildung 19: Das Heron'sche Verfahren

Rechtecken (Flächeninhalt a) zu erhalten, wird aus einem gegebenen

Rechteck gemäß der Vorschrift $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ eine neue Rechtecksseitenlänge kreiert, die das *arithmetische Mittel* der beiden alten ist. Durch sukzessives Einsetzen in diese Formel nähern sich die beiden Rechtecksseitenlängen an, im Grenzwert wird daraus die gesuchte Quadratseitenlänge $\sqrt{a}$.

(ii) *Funktion:* eine eindeutige Abbildung, die meist mit Hilfe einer Tabelle, eines Graphen oder mittels eines Funktionsterms im Mathematikunterricht angegeben wird. Der Wechsel zwischen diesen unterschiedlichen Darstellungen ist ein wesentliches Element jedes Mathematikunterrichts.

(iii) *Approximation:* zum Beispiel das Exhaustionsverfahren nach ARCHIMEDES zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl π. In Abbildung 20[7] sind regelmäßige Polygone (Vielecke) zu sehen, die einem Kreis einge- bzw. umschrieben werden. Die Folgen $\langle s_n \rangle$ bzw. $\langle S_n \rangle$ der

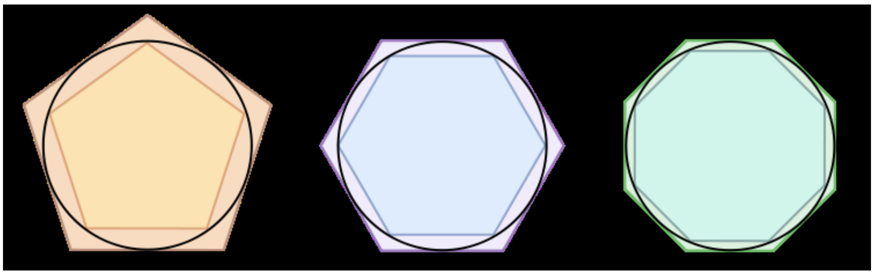


Abbildung 20: Die Exhaustionsmethode zur Approximation von π

Seitenlängen der einge- bzw. umschriebenen regelmäßigen n-Ecke konvergieren für n gegen Unendlich gegen null. Die zugehörigen Umfänge $u_n = n \cdot s_n$ bzw. $U_n = n \cdot S_n$ streben dann gegen 2π, die entsprechenden Flächeninhalte gegen π, wenn der Radius des Kreises gleich eins gesetzt wird.

(iv) *Modellbildung:* „Vereinfachen ohne Verfälschen" (R. FISCHER) ist die Kunst bei dieser Idee im Mathematikunterricht. Für die bewusste Umsetzung dieses Grundsatzes und als Orientierungshilfe, fast als Ge-

[7] `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg?uselang=de`

brauchsanweisung, ist der sogenannte *Modellierungskreislauf* in verschiedenen Versionen und Komplexitätsgraden entwickelt worden, der bei einer Modellbildung idealiter zu durchlaufen ist. Abbildung 21[8] zeigt eine sehr bekannte Version aus dem Jahre 2006.

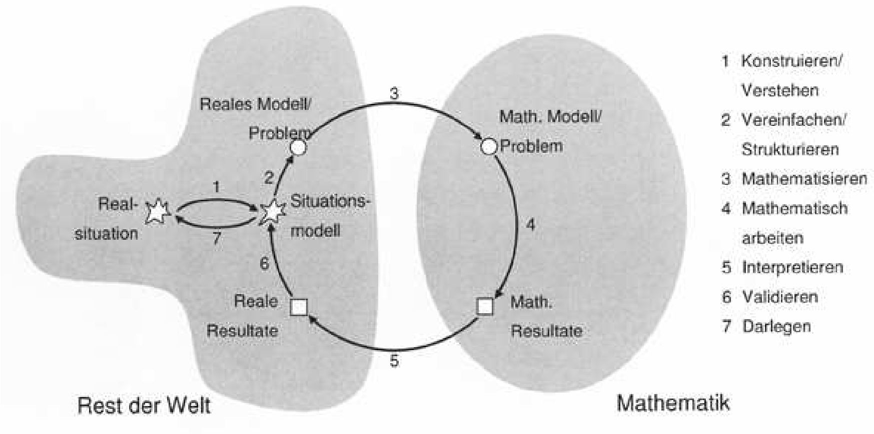


Abbildung 21: Der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss

(v) *Optimieren:* diese Idee findet in verschiedenen Zusammenhängen ihre Realisierung. Eine Möglichkeit eröffnet sich bei der *linearen Interpolation* durch die Methode der *linearen Regression*. Dabei wird durch eine gegebene Punktwolke, die Ausdruck einer zweidimensionalen Datenreihe ist (zum Beispiel Größe und Gewicht einer bestimmten Population) und bei der ein linearer Zusammenhang der beiden Merkmale empirisch vermutet wird oder aus theoretischen Gründen angenommen werden kann, eine sogeannte *Ausgleichsgerade* gelegt. Diese festzulegen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine weit verbreitete (auch in Anwendungswissenschaften wie Psychologie oder Soziologie zum Beispiel) davon ist, die Summe der Quadrate der *vertikalen* Abstände (Abbildung 22[9]) von den einzelnen Daten zur Geraden zu minimieren. Auf

[8] http://kira.dzlm.de/material/mathe-mehr-als-ausrechnen/prozessbezogene-kompetenzen-f%C3%B6rdern-beispielaufgaben-3

[9] http://wikis.zum.de/zum/Datei:Tschlinkert_Regr2.gif

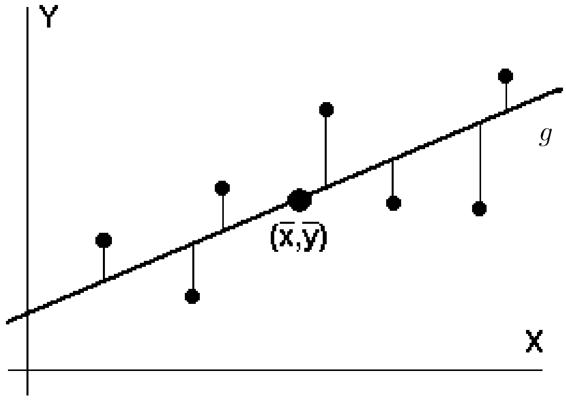


Abbildung 22: Zur linearen Regression: die vertikalen Abstände

diese Weise wird hier also die optimale Ausgleichsgerade gefunden. Formal sei $g : y = ax + b$ die Gleichung der gesuchten Geraden g, es sind also die Parameter a und b zu bestimmen. Dazu wird die Summe $\sum_i (y_i - \underbrace{ax_i - b}_{g(x_i)})^2$ minimiert. Dabei werden mit (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ die n erhobenen Datenpaare des zweidimensionalen Merkmals (X, Y) bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punktwolke immer auf einer solchen Ausgleichgeraden liegt (Abbildung 22). Mit $\bar{x}$ wird das arithmetische Mittel $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ notiert, analoges gilt für $\bar{y}$.

Auch noch in einem anderen Zusammenhang spielt die lineare Approximation eine bedeutende Rolle. Die *Tangente* in einem Punkt eines Funktionsgraphen ist die *bestmögliche lineare Approximation* dieser Funktion ebendort. Was heißt hier „bestmöglich"? Sehen wir uns dazu Abbildung 23 an. Es ist dort die Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Punkt P an der Stelle x_0 eingezeichnet. Bewegen wir uns ein bisschen von x_0 weg, um ein Stückchen h, dann unterscheiden sich Tangente und Funktionsgraph an dieser neuen Stelle $x_0 + h$ um $r(h) = f(x_0 + h) - t(x_0 + h)$: siehe Abbildung 23. Diese Differenz $r(h)$ ist der absolute Fehler. Nun betrachten wir den relativen Fehler $\frac{r(h)}{h}$. Wenn h gegen null geht, geht dieser relative Fehler genau dann gegen null, wenn die approximierende Gerade eben die Tangente in x_0 ist.

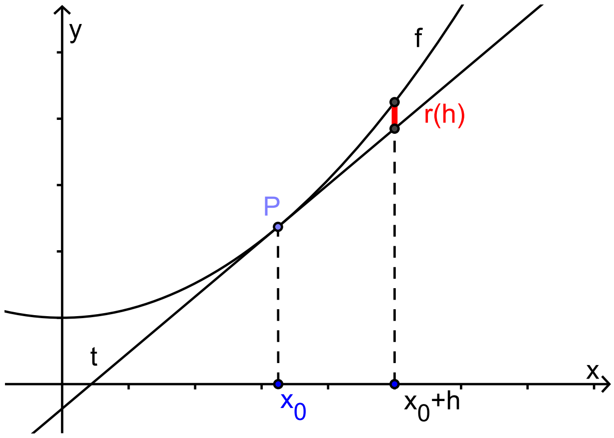


Abbildung 23: Zur linearen Approximation einer Funktion f

Für jede andere Gerade durch den Punkt $P(x_0, f(x_0))$ gilt das nicht. In diesem Sinne approximiert die Tangente ihre zugehörige Funktion bestmöglich („optimal“).

Schließlich sind die bekannten *Extremwertaufgaben* hier zu nennen, bei denen ein Optimum meist unter Nebenbedingungen gesucht wird. Vergleiche dazu Abschnitt 1.3.2.

Kennzeichen fundamentaler Ideen ([4], S. 6 f.):

1. *Weite* meint logische Allgemeinheit. Sie lassen Spielraum für Interpretationen und bringen ein hohes Maß an Anpassungsfähigkeit mit sich.

2. *Fülle* meint Vielfältigkeit der Anwendbarkeit. Das bedeutet Variantenreichtum fundamentaler Ideen, dieser ist nicht zu verwechseln mit dem bloß quantitativ häufigen Auftreten eines mathematischen Konzepts.

3. *Sinn* meint eine Verankerung im Alltagsdenken.

2.2 Grundvorstellungen

Diese Konzept stammt von Rudolf vom Hofe ([7]). Es „beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung." ([7], S. 97). Drei Aspekte dieses Phänomens werden dabei besonders beachtet ([7], S. 97 f.):

- die *Sinnkonstituierung* durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge
- der Aufbau entsprechender *Repräsentationen* bzw. „Verinnerlichungen", sodass operatives Handeln auf der Vorstellungsebene möglich wird
- die *Anwendung* eines Begriffs auf die Realität durch Erkennen der Struktur oder durch Modellieren des Sachproblems mithilfe der mathematischen Struktur [vgl. Abschnitt 2.1 (iv)]

Wir unterscheiden zwischen *normativen* und *deskriptiven* Grundvorstellungen. Erstere finden sich bei den Lehrenden, ihre didaktische Hauptaufgabe besteht darin, geeignete Sachzusammenhänge zu präsentieren, die den jeweiligen mathematischen Begriff auf eine für den Lernenden verständliche Art konkretisieren. Sie sind also eine inhaltlich-anschauliche Ergänzung zu den rein formalen Aspekten eines Begriffs. Die tatsächlichen Verstehensprozesse der SchülerInnen manifestieren sich als deskriptive Grundvorstellungen. Zeigen sich Differenzen zwischen diesen beiden Ausprägungen, dann sind diese eine Quelle für Missverständnisse. Schwierigkeiten beim Lernprozess der SchülerInnen können dann die Folge sein.

Für den Begriff der *„Bruchzahl"* sollen nun einige Grundvorstellungen angeführt werden (nach [3]).

- als *Teil eines Ganzen:* $\frac{a}{b}$ von 1: z. B. eine dreiviertel Torte (Abbildung 24[10])
- als *Vergleichsoperator:* $\frac{a}{b}$-mal so viel wie ...: z. B. in Abbildung 25[11] hat die Menge B $\frac{4}{3}$-mal so viele Elemente wie die Menge A
- als *Quasikardinalzahl:* Nenner eines Bruches als eigene — neue — Einheit: z. B. $\frac{2}{5}$ sind zwei Fünftel, damit kann ich $\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$ wie in $\mathbb{N}$ rechnen

[10] http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung

[11] http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/uploads/7/7723_surjektiv_1.PNG

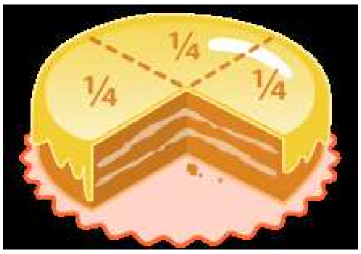


Abbildung 24: Eine dreiviertel Torte

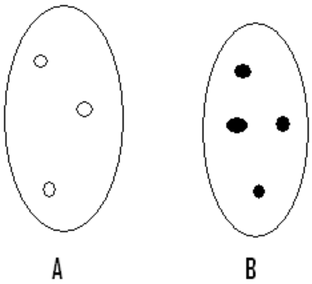


Abbildung 25: Zwei Mengen

In diesen Kontext passt auch das *Erweitern und Kürzen* von Brüchen. In Abbildung 26[12] ist das Erweitern als Verfeinern dargestellt, das Kürzen dagegen als Vergröbern. Somit erhält eine Bruchzahl unendlich viele Darstellungen als Bruch.

Schließlich sind auch bei den *Grundrechnungsarten* von Bruchzahlen Grundvorstellungen zu konstatieren. Das *Dividieren* zum Beispiel kann als *Teilen bzw. Verteilen* in manchen Situationen angesehen werden: $\frac{6}{7}\,l$ Wein auf drei Personen aufteilen führt zu $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}\,l$ Wein pro Person. Für diese Vorstellung muss der Divisor eine natürliche Zahl sein, sonst ist sie sinnlos.

Eine andere Vorstellung in diesem Zusammenhang ist das *Messen bzw. Aufteilen.* $\frac{3}{4}\,l$ Fanta wird in $\frac{1}{4}\,l$-Dosen gefüllt. Dann braucht man $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$ Dosen. Fasst eine Dose gar einen halben Liter, dann sind $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, also $1\frac{1}{2}$ Dosen notwendig.

[12] `http://wikis.zum.de/zum/images/2/28/Bild_erweitern_k%C3%BCrzen.png`

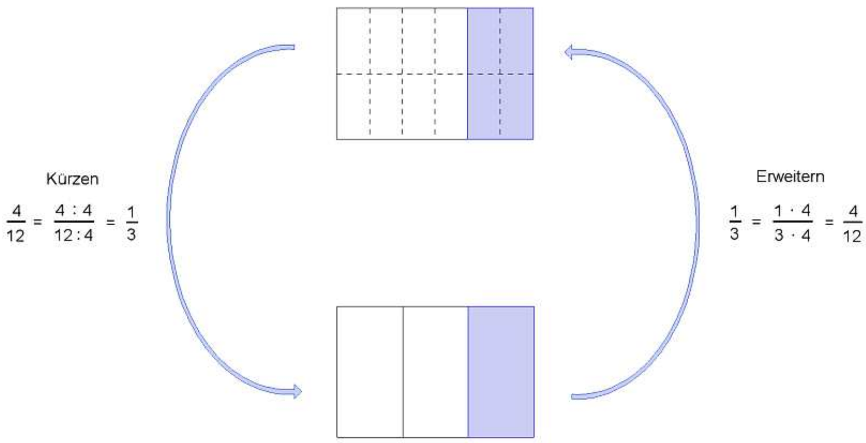


Abbildung 26: Kürzen und Erweitern

Für die Rechnung $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$ existiert leider keine Grundvorstellung. In diesem Fall hilft nur die Kenntnis des formalen Kalküls weiter.

2.3 Mathematische Kompetenzen

Unter *Kompetenzen* wollen wir längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstehen, die SchülerInnen befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, dies zu tun (vergleiche [5], S. 9). *Mathematische Kompetenzen* beziehen sich dann auf bestimmte Inhalte, auf mathematische Tätigkeiten und auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzungen (ebenda). Sie können also als Tripel dargestellt werden, wie das bei den Bildungsstandards M8 ([5], S. 9) auch geschieht.

Die *Grundkompetenzen* bei der Zentralmatura dagegen sollen

- „für das Fach grundlegend,
- längerfristig verfügbar und
- gesellschaftlich relevant“

sein ([2], S. 3). Für den Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ finden wir unter der Überschrift „Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ und $a, \lambda \in \mathbb{R}$]“ die Grundkompetenz „FA 5.4: Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können“ ([2], S. 11).

Eine Aufgabe hierzu lautet wie folgt:

> Die Funktion f mit $f(x) = 100 \cdot 2^x$ beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess. Wie ändert sich der Funktionswert, wenn x um 1 erhöht wird?
>
> Der Funktionswert $f(x+1)$ ist
>
> | | |
> |---|---|
> | um 1 größer als $f(x)$ | ☐ |
> | doppelt so groß wie $f(x)$ | ☐ |
> | um 100 größer als $f(x)$ | ☐ |
> | um 200 größer als $f(x)$ | ☐ |
> | um 100% größer als $f(x)$ | ☐ |
>
> Kreuze die beiden zutreffenden Antworten an!

Literatur

[1] Brinkmann, A.: Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps. In: *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht.* Band 1. Herausgegeben von A. Brinkmann, J. Maaß und H.-S. Siller. Aulis Verlag, München 2011, 22–35.

[2] *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013).* Projektteam: V. Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller (Leitung), G. Vormayr, M. Weiß und E. Willau. `https://www.bifie.at/node/1442`

[3] Malle, G.: Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Basisartikel). In: *mathematik lehren* / Heft 123 (2004), 4–8.

[4] Schwill, A.: *Fundamentale Ideen der Informatik.* `http://www.informatikdidaktik.de/Forschung/Schriften/ZDM.pdf` (o. J.)

[5] *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schüler und Schülerinnen am Ende der 8. Schulstufe.* Version 4/07. Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt 2007. `http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf`

[6] Tietze, U.-P., Klika, M. und Wolpers, H.: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis.* Unter Mitarbeit von F. Förster. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1997.

[7] vom Hofe, R.: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Texte zur Didaktik der Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u. a. 1995.

[8] Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Herausgegeben von E. Ch. Wittmann. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1991 (2., verbesserte Auflage).

[9] Winter, H.: *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung.* Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61 (1995), 37–46.

[10] Wittmann, E. Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009 (6., neu bearbeitetete Auflage).