



universität
wien

250038

**Seminar zum Schulpraktikum
WS 2015/16**

Stefan Götz

SRP-Mathematik AHS („Zentralmatura“)



Im Fokus

Fähigkeiten, die

- für das Fach **grundlegend**,
- **längerfristig** verfügbar und
- **gesellschaftlich** relevant

sind.

Dazu:

sog. **Grundkompetenzen** als reflektiertes Basiswissen
in einem **Katalog** festgehalten

(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 3 bzw. S. 7 f., S. 9 ff., S. 14 f. und S. 16 ff.)



Was sind Typ-1-Aufgaben?

Typ-1-Aufgaben sind Aufgaben, die auf die im Katalog angeführten **Grundkompetenzen** fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten **ohne** darüber hinausgehende **Eigenständigkeit** nachzuweisen.

(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 23)



Die vier Inhaltsbereiche

1. Algebra und Geometrie (AG)
2. Funktionale Abhängigkeiten (FA)
3. Analysis (AN)
4. Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)



Bildungstheoretische Orientierung zur Analysis

Immer: Kommunikation mit ExpertInnen (nach Fischer)

Im Mittelpunkt: **Änderungsverhalten** von Größen →
Differenzen- und Differentialquotient

diskret

stetig

- Zusammenhang **Bestands- und Flussgrößen** in verschiedenen Kontexten, z. B. in der **Physik**: Stromstärke – Ladung
- **Bestimmtes Integral**: Grenzwert einer Summe von Produkten
→ Verwendung in verschiedenen Kontexten, z. B. Arbeit als Wegintegral der Kraft
- **Begrifflichkeit** im Alltag – Fachbegriffe, z. B.:
Beschleunigung - Momentangeschwindigkeit
→ **Was bedeutet eine „momentane“ Änderung einer bestimmten Größe?**
- **Formalismus** {
 - Deuten und
 - Darstellen(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 13)



Funktionale Abhängigkeiten: Was beinhalten sie?

- Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
- **Lineare Funktion** [$f(x) = k \cdot x + d$]
- **Potenzfunktion** mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$,
oder mit $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$
- **Polynomfunktion** [$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]
- **Exponentialfunktion** [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw.
 $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $b \in \mathbb{R}^+$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$]
- **Sinusfunktion, Cosinusfunktion**

(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 9 ff.)



Beispiel 1: Grundkompetenz zu FA + Musteraufgabe

Exponentialfunktion

Gegeben ist eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

- Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.
- Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e -fache.
- Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e .
- Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $1/e$ -fache.
- Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.



Beispiel 1: Grundkompetenz zu FA + Musteraufgabe

Exponentialfunktion

- Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.
- Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e -fache.
- Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e .
- Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $1/e$ -fache.
- Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.

MC-Aufgabe (x aus 5)

FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können



Beispiel 2: Grundkompetenz zu AG + Musteraufgabe

Gleichung 3. Grades

Geben Sie die Lösungen der folgenden Gleichung an.

$$4x \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$$

Möglicher Lösungsweg:

$$x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = 5$$

AG 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

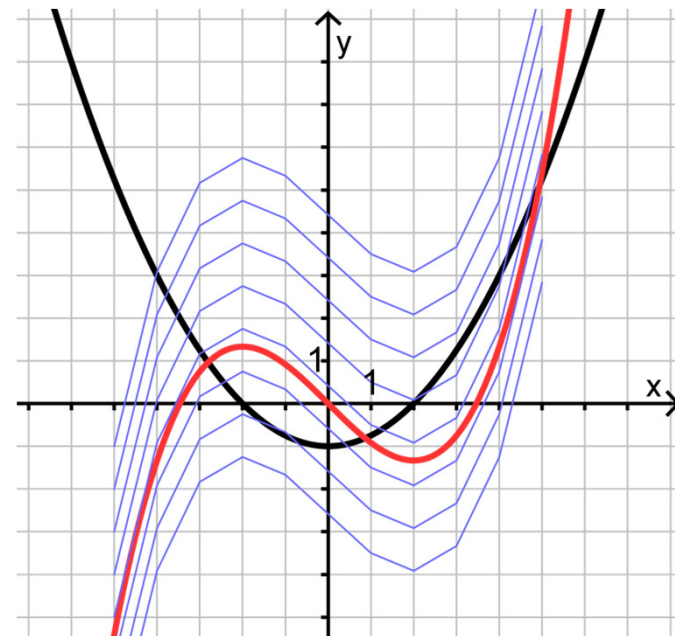
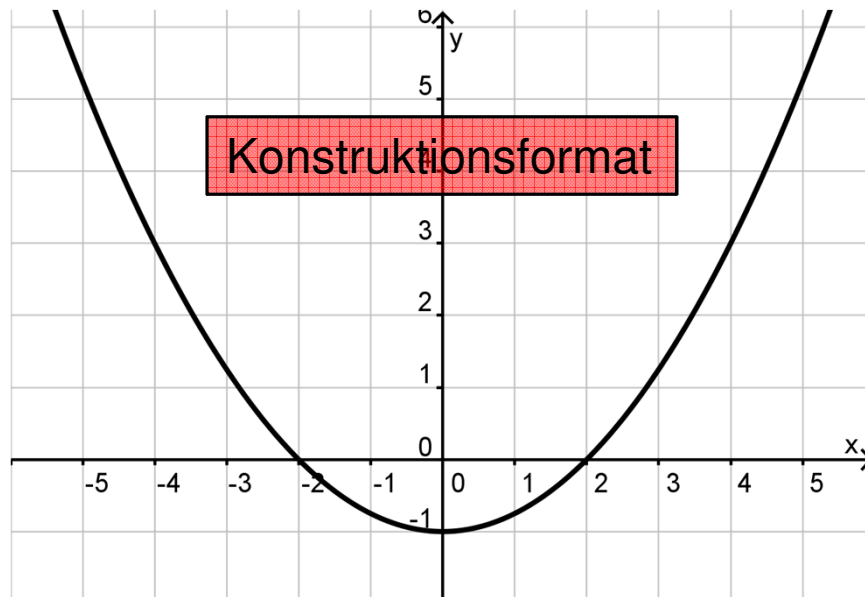
Offenes Aufgabenformat



Beispiel 3: Grundkompetenz zu AN + Musteraufgabe

AN 3.2: Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

Skizziere eine Stammfunktion:





Beispiel 4: Grundkompetenz zu WS + Musteraufgabe

WS 4.1: Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekanntem Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

Wir haben eine Stichprobe von 500 Personen und daraus ein Konfidenzintervall für einen unbekanntem Anteil p berechnet. Wie sollte man vorgehen, um das Konfidenzintervall enger zu machen? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

- A Wir vergrößern die Stichprobe.
- B Wir verkleinern die Stichprobe.
- C Wir vergrößern das Sicherheitsniveau.
- D Wir verkleinern das Sicherheitsniveau.
- E Wir können gar nichts tun.

Multiple-Choice-Aufgabenformat 2 aus 5

Richtig sind A und D.



Weitere Aufgabenformate 1:

Halboffenes Antwortformat

Die korrekte Antwort oder ein vorgegebenes bzw. passendes mathematisches Objekt soll in eine vorgegebene Formel, Funktion, etc. eingesetzt werden.

Man kann mithilfe der Geradengleichung $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ den Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welchen Wert der Parameter t bei dieser Rechnung annehmen muss!

$t =$ _____

AG 3.4: Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagenbeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können



Weitere Aufgabenformate 2:

Lückentext

Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, d. h. im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die Lücken durch Ankreuzen der beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten gefüllt werden.

Beispiel:
Gegeben ist die Zahl $\sqrt{5}$.

Aufgabenstellung:
Vervollständigen Sie den folgenden Satz, sodass er mathematisch korrekt ist!

Die Zahl $\sqrt{5}$ ist eine _____ ① _____, weil die _____ ② _____.

①	
rationale Zahl	<input type="checkbox"/>
irrationale Zahl	<input type="checkbox"/>
natürliche Zahl	<input type="checkbox"/>

②	
Darstellung der Zahl ein Wurzelzeichen hat	<input type="checkbox"/>
Zahl nicht als Bruch dargestellt werden kann	<input type="checkbox"/>
Zahl als periodische Dezimalzahl dargestellt werden kann	<input type="checkbox"/>

AG 1.1: Wissen über Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} verständig einsetzen können



Weitere Aufgabenformate 3:

Zuordnungsformat

Bei diesen Aufgaben sollen **Informationen zugeordnet** werden (z.B. anhand von Buchstaben, Pfeilen etc.). Dieses Antwortformat ist durch **mehrere Aussagen** (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen **mehrere Antwortmöglichkeiten** gegenüberstehen. Aufgaben dieses Formats werden korrekt bearbeitet, indem die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der entsprechenden Buchstaben den jeweils zutreffenden Aussagen zugeordnet werden. **Die Anzahl der Antwortmöglichkeiten (= vier) stimmt nicht mit der Anzahl der Aussagen (= sechs) überein.**



Zuordnungsformat: ein Beispiel

Beispiel:

Mit Exponentialfunktionen können Abnahme- und Zunahmeprozesse beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den angegebenen Funktionsgleichungen die jeweils beschriebenen Vorgänge zu!

Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verdoppelt sich täglich.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verringert sich täglich um 15 %.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 85 % zu.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 50 % ab.	

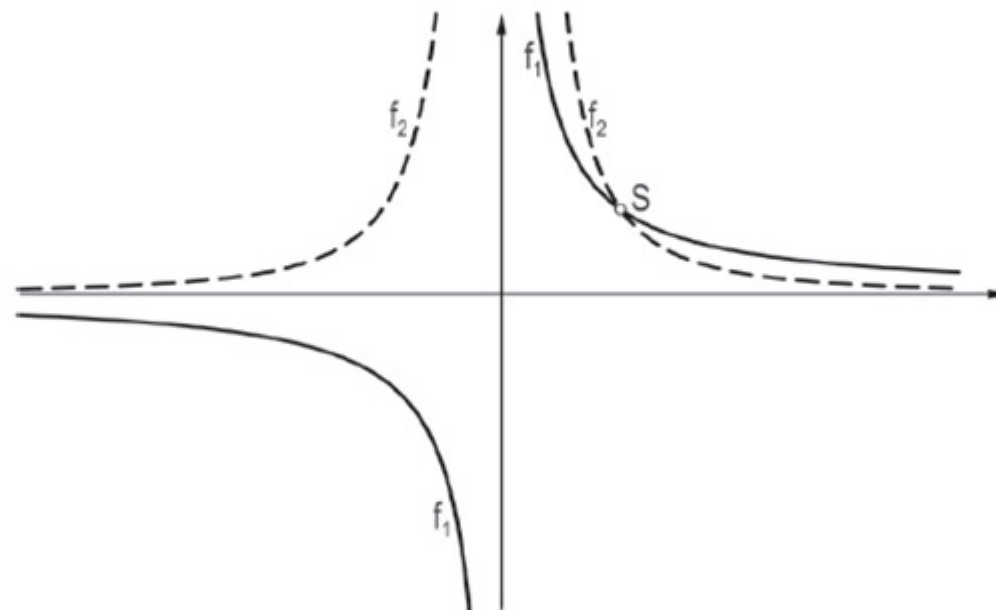
A	$G(t) = 1 \cdot 0,5^t$ (t in Tagen)
B	$G(t) = 1 \cdot 1,85^t$ (t in Tagen)
C	$G(t) = 1 \cdot 0,85^t$ (t in Tagen)
D	$G(t) = 1 \cdot 2^t$ (t in Tagen)
E	$G(t) = 1 \cdot 1,5^t$ (t in Tagen)
F	$G(t) = 1 \cdot 1,2^t$ (t in Tagen)

FA 1.7: Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können



Weitere Aufgabenformate 4: Multiple-Choice-Aufgabe 1 aus 6

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen zweier Funktionen mit den Gleichungen $f_1(x) = \frac{a}{x}$, $a > 1$ und $f_2(x) = \frac{a}{x^2}$, $a > 1$ dargestellt.





Fortsetzung

Aufgabenstellung:

Welcher der unten angegebenen Punkte gibt die Koordinaten des Schnittpunktes korrekt an?
Kreuzen Sie den zutreffenden Punkt an!

$S = (1 1)$	<input type="checkbox"/>
$S = (a 1)$	<input type="checkbox"/>
$S = (1 a)$	<input type="checkbox"/>
$S = (a a)$	<input type="checkbox"/>
$S = (0 a)$	<input type="checkbox"/>
$S = (1 \frac{1}{a})$	<input type="checkbox"/>

FA 1.6: Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können



Was sind Typ-2-Aufgaben?

Typ-2-Aufgaben sind Aufgaben zur **Anwendung** und **Vernetzung** der **Grundkompetenzen** in **definierten Kontexten** und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, im Rahmen derer unterschiedliche Fragestellungen bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten gegebenenfalls größere Bedeutung zukommt. Eine **selbstständige** Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich.

(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 23)



Kontexte

➤ Einheiten und Größen:

- Prozent (%), Promille (‰), parts per million (ppm)
- **Vorsilben:** Tera, Giga, ..., Dezi, Zenti, Milli, ...
- **Physikalische Größen und Einheiten:** Temperatur in Grad Celsius bzw. Kelvin, Kraft in Newton, elektrische Spannung in Volt, ...
- **Definitionen physikalischer Größen:** Arbeit $W = F \cdot s$, gleichförmige geradlinige Bewegung $v = \frac{s}{t}$, $v = \frac{ds}{dt}$, $v(t) = s'(t)$, ...

➤ Finanzmathematische Grundlagen:

- **Zinseszinsrechnung:** $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $i = \frac{p}{100}$
- **Kosten-Preis-Theorie:** Erlösfunktion, Gewinnfunktion, ...

(Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, S. 19 ff.)



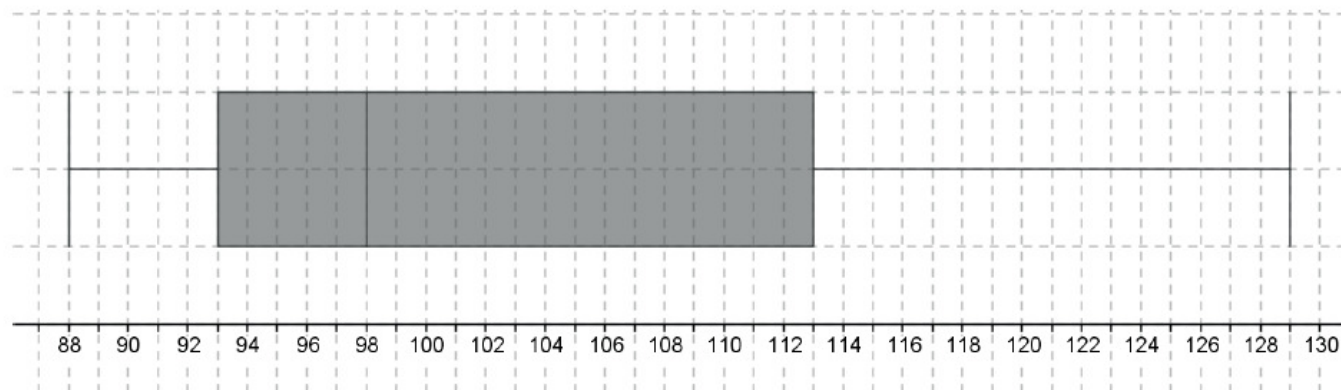
Eine Typ-2-Aufgabe: Section Control

Der Begriff *Section Control* (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert.

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die *Section Control* bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder“ bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129
--------------	----	-----	----	----	-----	----	----	----	-----	-----





Aufgabenstellung:

- a) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert \bar{x} und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	<input type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	<input type="checkbox"/>
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	<input type="checkbox"/>
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	<input type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von \bar{x} .	<input type="checkbox"/>



Fortsetzung der Aufgabenstellung:

- b) Bestimmen Sie aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Geben Sie an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimmen Sie auch deren Werte!

- c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählten Fahrzeuglenkern! Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d. h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!



Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103,3 \text{ km/h}$
 $s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 13,6 \text{ km/h}$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	<input type="checkbox"/>
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	<input checked="" type="checkbox"/>
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von \bar{x} .	<input type="checkbox"/>



Fortsetzung

- b) Daten aus dem Boxplot: Median ... 98 km/h; unteres Quartil ... 93 km/h;
oberes Quartil ... 113 km/h; Spannweite ... 41 km/h;
Quartilsabstand ... 20 km/h

- c) Lösung mittels Binomialverteilung

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,14 = 7$$

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 2,45$$

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(5 \leq X \leq 9) = \\ &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = \\ &= 0,1286 + 0,1570 + 0,1606 + 0,1406 + 0,1068 = 0,6936 = 69,36 \% \end{aligned}$$



Rahmenbedingungen

- 120' für Typ 1 und 150' für Typ 2, dazwischen Abgabe
- Je 24 Punkte zu erreichen, das sind
 - 24 Typ 1-Aufgaben und
 - 4 bis 6 Typ 2-Aufgaben mit 0/1/2 Punkt(en) pro Teilaufgabe, davon 4 Ausgleichspunkte
- Technologie + Formelsammlung wie gewohnt
- Notenschlüssel:

Genügend	16 – 23
----------	---------

ACHTUNG: mindestens 16 Punkte aus Typ 1-Aufgaben bzw. Ausgleichspunkte für positive Bewertung!!!



Die Kompensationsprüfung

Wenn schriftliche Klausur negativ beurteilt, um Laufbahnverlust zu vermeiden.

Sie besteht aus **fünf Fragen**, jede davon hat zwei Teile:

1. **Grundkompetenzfrage** entspricht Typ 1-Aufgabe → **selbständige** Präsentation
2. **Leitfrage**: dient der **Reflexion** und **Kommunikation** über angesprochene Grundkompetenz → **Dialog** mit dem Prüfer / der Prüferin

Dazu: **Hinweise** für Lehrer(innen): was wird erwartet?



Rahmenbedingungen

- **Vorbereitungszeit:** mindestens 30‘
- **Prüfungszeit:** maximal 25‘

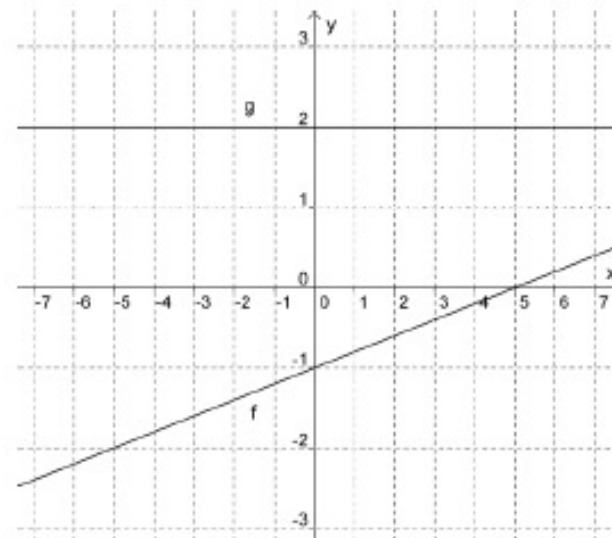
Beurteilung:

Note	erreichte Indikatoren
„Genügend“	4 GK-Indikatoren + 0 Leitfragenindikatoren 3 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator
„Befriedigend“	5 GK-Indikatoren + 0 Leitfragenindikatoren 4 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator 3 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren
„Gut“	5 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator 4 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren 3 GK-Indikatoren + 3 Leitfragenindikatoren
„Sehr gut“	5 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren 4 GK-Indikatoren + 3 Leitfragenindikatoren



Ein Beispiel

Gegeben sind die Graphen zweier linearer Funktionen f und g .



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für f und g und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage für die Kandidatin/den Kandidaten:

Der Graph einer linearen Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = k \cdot x + d$ wird an der x -Achse und an der y -Achse gespiegelt.

Erklären Sie anhand der Graphen von f und g , wie sich dabei die Parameter k und d verändern!



Fortsetzung

Hinweise zur Leitfrage für Lehrer/innen:

Es sollen bei der Beantwortung der Leitfrage jedenfalls die nachfolgend aufgelisteten Aspekte besprochen werden:

Spiegelung an der x -Achse:

f : Bei k und d ändert sich das Vorzeichen.

g : k bleibt gleich, bei d ändert sich das Vorzeichen.

Spiegelung an der y -Achse:

f : Bei k ändert sich das Vorzeichen, d bleibt gleich.

g : k und d bleiben gleich.



Internetquellen

1. Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. (Stand: März 2013). Projektteam: V. Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller (Leitung), G. Vormayr, M. Weiß, E. Willau.
<https://www.bifie.at/node/1442>
2. Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS).
<https://www.bifie.at/node/2681>, September 2014.
3. Kompensationsprüfung zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik. Konzepterstellungsguppe: G. Gurtner, E. Sattlberger, H.-S. Siller (Projektleitung), E. Süss-Stepancik, G. Vormayr.
<https://www.bifie.at/node/2319>