Physique mathématique/*Mathematical Physics*

Sur les coordonnées p-harmoniques en relativité générale

Piotr T. CHRUŚCIEL

Résumé — On présente des théorèmes d'existence de solutions globales de l'équation de p-Laplace avec un comportement asymptotique approprié au théorème d'énergie positive de Jezierski et Kijowski.

On p-harmonic coordinates in general relativity

Abstract — *Existence theorems of global solutions of the p-Laplace equation with asymptotic properties apropriate for the positive energy theorem of Jezierski and Kijowski are presented.*

Que ce soit en relativité générale numérique, relativité générale hamiltonienne ou lors des essais de quantification de la relativité générale, un des obstacles auquel on se heurte est le libre choix de coordonnées qui implique un nombre de difficultés bien connues. Une des méthodes pour surmonter ce problème consiste à imposer des conditions qui rendent le système de coordonnées unique. L'embarras de choix de telles conditions rend la procédure hautement arbitraire; cependant certains choix de coordonnées peuvent conduire à des simplifications remarquables. Ainsi il a été montré par J. Kijowski [1] que des coordonnées « 3-harmoniques » mènent à une démonstration élémentaire du théorème d'énergie positive. Récemment Jezierski et Kijowski [2] ont remarqué que des coordonnées p-harmoniques, avec $p \in [1,5]$, permettent aussi une démonstration simple du théorème d'énergie positive, que ce soient des coordonnées sphériques ou des coordonnées quasi cartésiennes. Le but de cette Note est de montrer que le théorème de Jezierski et de Kijowski se généralise à des conditions asymptotiques sur la métrique beaucoup plus faibles que celles considérées originellement [2] (théorème 1) et de présenter des théorèmes d'existence de coordonnées p-harmoniques. Le théorème 2 assure l'existence de solutions globales de l'équation de p-Laplace, $p>2$, sous des conditions asymptotiques relativement fortes sur la métrique, trop fortes pour être intéressantes d'un point de vue physique si $p \neq 3$ — dans le cas $p=3$ l'invariance conforme de l'équation de p-Laplace laisse la liberté de multiplier la métrique par un facteur conforme arbitraire sur lequel nous n'imposons aucune condition. Le théorème 3 assure l'existence de solutions pour des métriques α-asymptotiquement plates, avec n'importe quel α plus grand que zéro et tout $p>1$, mais pour un ensemble ouvert de métriques seulement. On se doit de souligner que ce théorème garantit beaucoup plus que l'existence de solutions dans un voisinage de la métrique plate : en effet pour toute métrique de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} ds^2=\Phi(dx^n)^2+g_{AB}\,dx^A\,dx^B, \qquad \Phi=(f(x^A)\det g_{AB})^{1/(p-1)}, \\ \qquad\qquad A,B=1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

la fonction x^n est p-harmonique, quelles que soient les fonctions $f(x^A)$ et $g_{AB}(x^i)$, sans points critiques si f et Φ sont strictement positives — il est clair que, par exemple, le scalaire de courbure de telles métriques peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. C^k_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, désigne l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur $\mathbb{R}^n$ telles que la norme

$$\|f\|_{C^k_\alpha}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_{|\beta|=0}^{k}\sigma(x)^{-\alpha+|\beta|}|\nabla^\beta f(x)|, \qquad \sigma(x)=(1+|x|^2)^{1/2},$$

Note présentée par Yvonne CHOQUET-BRUHAT.

0249-6291/87/03050797 $ 2.00

soit finie, $C_\alpha^{k,\delta}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,1]$, contient toutes les fonctions telles que la norme

$$\|f\|_{C_\alpha^{k,\delta}} = \|f\|_{C_\alpha^k} + [f]_{C_\alpha^{k,\delta}},$$

$$[f]_{C_\alpha^{k,\delta}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \Gamma(|x|/2, 2|x|)} \sum_{|\beta|=k} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\delta} \sigma(x)^{-\alpha+k+\delta},$$

est finie $S(r)$ et $B(r)$ désignent une sphère et une boule de rayon r, $\Gamma(a, b)$ l'anneau $\overline{B(b) \setminus B(a)}$.

Dans ce qui suit nous supposerons que g_{ij} est une métrique uniformément elliptique sur $\mathbb{R}^n$; nous dirons que g est α-asymptotiquement plate si

$$g_{ij} - \delta_{ij} \in C_{-\alpha}^{k,\lambda}, \qquad k \geqq 1, \quad \lambda \in (0,1], \tag{2}$$

pour un certain $\alpha > 0$. Pour certaines applications nous aurons besoin d'une topologie dans l'espace des métriques. Nous noterons $d_\alpha^{k,\delta}(g^1, g^2) = \sum_{i,j} \|g_{ij}^1 - g_{ij}^2\|_{C_\alpha^{k,\delta}}$. Nous dirons que la métrique g a une énergie finie si

$$\begin{cases} \lim\limits_{r \to +\infty} (g_{ij} - \delta_{ij}) r^{1/2} = \lim\limits_{r \to +\infty} g_{ij,k} r^{3/2} = 0, \\ g_{ij,k} \in L^2(\mathbb{R}^3), \qquad {}^3R(g) \in L^1(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{3}$$

(*cf.* par exemple [3], [4], [5]). On dira que f est p-harmonique si

$$\operatorname{div}(|\operatorname{grad} f|^{p-2} \operatorname{grad} f) = 0 \tag{4}$$

avec un certain $p > 1$ [(4) étant compris dans un sens faible].

LEMME 1. — *Supposons que g ait une énergie finie. Soient f_a, $a = 1, 2, 3$, des fonctions satisfaisant $f_1 = x + h_1$, $f_2 = y + h_2$, $f_3 = z + h_3$, avec*

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-1/2} h = \lim_{r \to +\infty} r^{1/2} |\nabla h| = \lim_{r \to +\infty} r^{3/2} |\nabla^2 h| = 0, \qquad h = h_a. \tag{5}$$

Soit

$$\begin{cases} A(f, R) = \displaystyle\int_{S(R)} |\nabla f| (n^i{}_{;j} n^j - n^j{}_{;j} n^i) \, dS_i, \\ n^i = \nabla^i f / |\nabla f|. \end{cases} \tag{6}$$

La limite $\lim\limits_{R \to \infty} (A(f_1, R) + A(f_2, R) + A(f_3, R))$ *existe, ne dépend pas des h_a, et est égale à $32 \pi m$.*

Démonstration. — On vérifie que dans chaque terme $A(f_a, R)$ la contribution des h_a s'intègre à zéro dans la limite R tendant vers l'infini par le théorème de Stokes. Un simple calcul donne alors

$$\lim_{R \to \infty} (A(x, R) + A(y, R) + A(z, R)) = 32 \pi m.$$

LEMME 2. — *Soient g, f_a comme dans le lemme 1. Supposons en plus que les fonctions f_a n'ont pas de points critiques. Soit*

$$B(f, R) = \int_{B(R)} {}^2R(f) |\nabla f| \, d\mu(g) \tag{7}$$

où ${}^2\mathrm{R}(f)$ *est le scalaire de courbure de la métrique induite sur les surfaces de niveau de* f. *La limite* $\lim_{\mathrm{R}\to\infty}(\mathrm{B}(f_1, \mathrm{R})+\mathrm{B}(f_2, \mathrm{R})+\mathrm{B}(f_3, \mathrm{R}))$ *existe, ne dépend pas des* h_a, *et est égale à* $16\pi m$.

Démonstration. — Une formule classique permet d'exprimer l'intégrale de ${}^2\mathrm{R}(f)|\nabla f|$ par une intégrale sur la sphère $\mathrm{S}(\mathrm{R})$; on vérifie comme précédemment que le résultat ne dépend pas des h_a d'après le théorème de Stokes; un calcul simple montre alors que

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}(\mathrm{B}(x, \mathrm{R})+(\mathrm{B}(y, \mathrm{R})+\mathrm{B}(z, \mathrm{R}))=16\pi m.$$

THÉORÈME 1. — *Si la métrique* g *a une énergie finie, s'il existe des fonctions* p*-harmoniques* f_a *satisfaisant les hypothèses des lemmes* 1 *et* 2, *avec certains* $p_a\in[1,5]$, *et si* ${}^3\mathrm{R}(g)\geqq 0$, *alors* $m\geqq 0$.

Démonstration. — L'identité trouvée par Jezierski et Kijowski [2] montre que $\lim_{\mathrm{R}\to\infty}(\mathrm{A}(f_a, \mathrm{R})+\mathrm{B}(f_a, \mathrm{R}))$ existe, est finie et positive — le résultat découle alors des lemmes 1 et 2.

Remarque. — Jezierski et Kijowski font l'hypothèse $g_{ij}=\Phi(r)\,\tilde{g}_{ij}$ avec $\tilde{g}-1+\varepsilon$-asymptotiquement plate; ceci implique

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\mathrm{B}(f_a, \mathrm{R})=\frac{16\pi}{3}m, \qquad \lim_{\mathrm{R}\to\infty}\mathrm{A}(f_a, \mathrm{R})=\frac{32\pi}{3}m.$$

La démonstration du théorème 1 repose sur l'existence de solutions de l'équation (4) satisfaisant (5). Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* g *une métrique uniformément elliptique sur* $\mathbb{R}^n$, $n>2$, α*-asymptotiquement plate avec* $\alpha>n(p-1)/p$, $p\geqq 2$. *Pour tout* $\mathrm{B}\in\mathbb{R}^n$, $|\mathrm{B}|=1$, *il existe une fonction* p*-harmonique* f_{B} *uniquement déterminée par les conditions*

$$\nabla(f_{\mathrm{B}}-\mathrm{B}_i x^i)\in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n), \qquad f(0)=f_0,$$

pour un certain f_0. *On peut choisir* f_0 *de façon que*

$$f_{\mathrm{B}}-\mathrm{B}_i x^i\in \mathrm{C}^1_\beta, \qquad \beta=\max(1-\alpha;\ 2-n). \tag{8}$$

Remarque. — Les conditions sur α et p forcent $\alpha>3/2$ si $n=3$, (5) sera donc satisfaite en vertu de (8).

Idée de la démonstration. — f_{B} est obtenue comme limite d'une sous-suite appropriée de la suite de fonctions f_n définies comme solutions de l'équation de p-Laplace sur $\mathrm{B}(n)$ satisfaisant à la condition de bord $f_{n\,|\,\mathrm{S}(n)}=\mathrm{B}_i x^i{}_{|\,\mathrm{S}(n)}$. La monotonie du p-laplacien permet de montrer

$$\|\nabla\varphi_n\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}\leqq \mathrm{C}\sum_{i,\,j}\|g_{ij}-\delta_{ij}\|^{p'}_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)} \tag{9}$$

avec $\varphi_n(x)=f_n-\mathrm{B}_i x^i$ pour $|x|\leqq n$, $\varphi_n=0$ pour $|x|\geqq n$, et $p'=p/(p-1)$, le membre de droite étant fini si $\alpha p'>n$. L'existence d'une sous-suite convergente peut être obtenue par les estimations *a priori* de Tolksdorf [6]; les propriétés asymptotiques découlent de (9) et d'un « booststrap » des estimations de [7].

Pour la démonstration du théorème 3 nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3. — *L'opérateur* $\mathrm{L}=a^{ij}\partial_i\partial_j+b^i\partial_i+c$ *avec* $a^{ij}-\delta^{ij}\in\mathrm{C}^{k,\,\delta}_{-\alpha}$, $\alpha>0$ a^{ij}*-uniformément elliptique,* $b^i\in\mathrm{C}^{k,\,\delta}_{-\alpha-1}$, $c\in\mathrm{C}^{k,\,\delta}_{-\alpha-2}$, $c\leqq 0$, *est un isomorphisme des espaces* ($n>3$) :

1. $\mathrm{C}^{l+2,\,\delta}_\beta$ *et* $\mathrm{C}^{l,\,\delta}_{\beta-2}$ *si* $n-2<\beta<0$, *et* $k\geqq 0$, $0\leqq l\leqq k$;
2. $\mathscr{C}^{l+3,\,\delta}_\beta$ *et* $\mathrm{C}^{l+1,\,\delta}_{\beta-2}$ *si* $0<\beta<1$ *et* $k\geqq 1$, $0\leqq l\leqq k$ *où* $\mathscr{C}^{m,\,\delta}_\beta=\{f\in\mathrm{C}^{m,\,\delta}_\beta : f(0)=0\}$.

Démonstration. — 1 et 2 se démontrent comme dans les démonstrations de [7], en utilisant la surjectivité du laplacien de $W^p_{k,\beta}$ sur $W^p_{k-2,\beta-2}$ pour $\beta<-n/p$ (*cf.* [8]).

THÉORÈME 3. — *L'ensemble des métriques pour lesquelles une fonction p-harmonique, $p>1$, avec les propriétés asymptotiques* (5) *existe et n'a pas de points critiques est ouvert dans la topologie $d^{1,\delta}_\alpha$ pour $1<\alpha<2$, $\delta\in(0,1]$, et $d^{2,\delta}_\alpha$ pour $0<\alpha<1$, $\delta\in(0,1]$, $n\geqq 3$.*

Démonstration. — Considérons l'opérateur L (opérateur de p-Laplace linéarisé en φ)

$$Lf=\left(g^{ij}+(p-2)\frac{\nabla^i\varphi\,\nabla^i\varphi}{|\nabla\varphi|^2}\right)f_{;ij}+b_k f^{;k}$$

$$b_k=(p-2)\,(\varphi_{;ik}\nabla^i\varphi/|\nabla\varphi|^2-2\,\varphi_{;ij}\nabla^i\varphi\,\nabla^j\varphi\,\nabla_k\varphi/|\nabla\varphi|^4)$$

où φ est n'importe quelle fonction sans point critique satisfaisant $\varphi-B_i x^i\in C^{2,\delta}_{1-\alpha}$. L est un isomorphisme de $C^{0,\delta}_{-1-\alpha}$ et $C^{2,\delta}_{1-\alpha}$ ou de $C^{1,\delta}_{-1-\alpha}$ et de $e^{3,\delta}_{1-\alpha}$ — le résultat découle du théorème des fonctions implicites.

Remarque. — Il est évident qu'un tel théorème est aussi vrai dans, par exemple, une topologie de Sobolev à poids dans l'ensemble de métriques. Le cas physiquement important $\alpha=1$ est inclu dans ce théorème dans le sens que si g est 1-asymptotiquement plate, elle est évidemment α-asymptotiquement plate, pour tout $\alpha<1$.

L'auteur a profité de nombreuses discussions avec L. Véron.

Note reçue le 7 septembre 1987, acceptée le 21 septembre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. KIJOWSKI, On positivity of gravitational energy, *Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting*, June 1985, R. RUFFINI éd., North Holland, 1987.

[2] J. JEZIERSKI et J. KIJOWSKI, On positivity of total energy in general relativity, *Physical Review* (à paraître).

[3] P. T. CHRUSCIEL, *Class. Quantum Grav.*, 3, 1986, p. L115.

[4] R. BARTNIK, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39, 1986, p. 661.

[5] N. O'MURCHADHA, *Jour. Math. Phys.*, 27, 1986, p. 1211.

[6] P. TOLKSDORF, *Jour. Diff. Eq.*, 51, 1984, p. 126.

[7] A. CHALJUB-SIMON et Y. CHOQUET-BRUHAT, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1, 1979, p. 9.

[8] R. C. MACOWEN, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 1979, p. 783.

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
parc de Grandmont, 37200 *Tours;*
adresse permanente : *Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences,*
Sniadeckich 8, P. O. Box 137, 00-950 *Warszawa, Pologne.*